



Title	前談話ニ續イテ
Author(s)	東屋, 五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 260, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75090
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1157 前談話ニ續イテ

東 屋 五 郎 (名大)

此ノ前ノ談話 1156 ニ於テ、浅野中山先生ノ論文「*A Remark on the Arithmetik in a sub-field*」ノ結果ガ *rein-inseparabel* ナ拡大体ノ場合ニモ同様ニ成立スルコトニツイテ述べマシタガ、更ニ上記論文ノ *a second proof* ノ方法ヲ少シ変ヘマスト何処、*Theorem 2* ニ相當スル定理カ次ノ如ク、一般ニ無限次代数的拡大体ノ場合ニモ成立ツコトガ分リマシタノデ、次ニ述ベテミマス。

從ツテ、前談話ノ結果モ特別ノ場合トシテ含マレルワケデアリマス。

定理^{*} k ガ整閉整域 $\mathcal{O}$ ノ商体、 K ガ k ノ代数的擴大体デ、 K ノ $\mathcal{O}$ ニ對スル *Hauptordnung*ヲ $\mathcal{O}$ トスルトキ、若シ $\mathcal{O}$ ニ於テ *gewöhnliche Arithmetik*ガ成立ツナラバ、 K ニ於テモソレガ成立ツ。

(証明) $\mathcal{O}$ ニ於テ *gewöhnliche Arithmetik*ガ成立ツタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ上記論文ノ *a second proof*ニアリマスヲウニ、次ノ條件ヲ満足スル K ノ *Primdivisor* $\mathfrak{p}$ ノ集合 $\{\mathfrak{p}\}$ ガ存在スルコトデアリマス：

1) $\mathcal{O} = \bigcap \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 、但シ $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ハ $\mathfrak{p}$ ノ賦値環ヲ表ハス。

* 逆ハ無限次拡大体ノ場合ニ必ずしも成立タナシ。

2) β はスベテ diskret.

3)* $a \neq 0$ $\rightarrow K$ の任意の元トスレバ、有限個の値以外デハ $W_{\beta}(a) = 0$ デアル。

但シ、 W_{β} は $\beta = 0$ リ定義サレル指數賦値 (ノーツ) $\rightarrow$ 表ハス。

4) 有限個の $(\{\beta\} = \text{属スル})$ Primaldivisor $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 及ビソレ = 對應シテ K の元 $a_1, a_2, \dots, a_m$ が與ヘラレタトキ、任意の實數 $M =$ 對シ

$$W_{\beta_i}(a - a_i) \geq M \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

$$W_{\beta}(a) \geq 0 \quad (\beta \neq \beta_i)$$

ナル K の元 a が存在スル。

シカシ、ユノ條件 4) ハ次、 $a_1 = 1, a_2 = \dots = a_m = 0$ ナル特別ノ場合ノ條件 4) デ置換ヘテヨイコトハ容易ニ分ル:

4') 有限個の Primaldivisor $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ が與ヘラレタトキ、任意の實數 $M =$ 對シ

$$W_{\beta_1}(a - 1) \geq M, \quad W_{\beta_i}(a) \geq M \quad (i \neq 1),$$

$$W_{\beta}(a) \geq 0 \quad (\beta \neq \beta_i)$$

ナル K の元 a が存在スル。

* a second proof = 於テ コノ條件が落サレテ
キマスガ。

而シテ、ソノ場合即チ上記ノ條件 1), 2), 3), 4) (又ハ 4')) が満足サレル場合、ソノ賦値環が $\mathcal{O}$ ヲ含ムメ
ウナ Prindivisor 全体が丁度 $\{\mathcal{P}\}$ トナリマス。

サテ、 $\{\mathcal{P}\}$ 、Prindivisor $\mathcal{P}$ ハ $k =$ 於テ (trivial
デナイ) Prindivisor $\mathcal{P}$ ヲ引起シマスガ、カ、ル $\mathcal{P}$ 全
体ノ集合 $\{\mathcal{P}\}$ ト $\mathcal{O}$ ノ間ニ於テモ上記ノ條件 1), 2), 3),
4') が満足サレルコトヲ証明スレバヨイ。

$\mathcal{O}$ ハ整閉ナル故、 $\mathcal{O} = \mathcal{O} \cap k = \bigcap_{\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \cap k = \bigcap_{\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$
ハリテアル。又 2), 3) が成立ツコトハ明カデアレ。

今、 $\{\mathcal{P}\}$ ヨリ任意ノ一ツノ $\mathcal{P}$ ヲトル。 $\mathcal{O}$ ハ $\sigma =$ 對ス
ル *Isotopieordnung*、即チ $\sigma =$ 對シ *ganz-abhängig*
ナリ全体ノ σ ノ環デアレカラ、 $\mathcal{P}$ ノ擴張ナル K 、Prim-
divisor ノ賦値環ハ $\mathcal{O}$ ヲ含ム故 $\{\mathcal{P}\} =$ 属スルコト
ガ分ル。(即チ $\{\mathcal{P}\}$ ハ $\{\mathcal{P}\}$ ノ擴張ナル Prindivisor
全体トナツテナル)

又 $\{\mathcal{P}\} =$ 關スル條件 3) = ヨウラ $\mathcal{P}$ ノ擴張ナル $\mathcal{P}$ ハ有
限箇シカナリ。

サテ、 k 、 $\mathcal{P}$ -連体ヲ $k_{\mathcal{P}}$ 、ソノ代数的開拡大体ヲ
 $\mathcal{O}$ トスレバ $k_{\mathcal{P}}$ ノ賦値 $w_{\mathcal{P}}$ ハ $\mathcal{O}$ 迄一意的ニ拡張可能デ
カラ、ソノ拡張サレタ $\mathcal{O}$ ノ賦値ヲモ $w_{\mathcal{P}} =$ テ表ハスコ
トニスル。

シカラバ、 $\mathcal{P}$ ノ擴張ナル K 、Prindivisor $\mathcal{P}$ ハ、
 K/k 、 $\mathcal{O}/k$ ノ中へノ同型置換 $\sigma =$ ヨリ $K \ni a \rightarrow w_{\mathcal{P}}(a)$

ナル賦値ニ對應スル ϵ ノデアル

從ツテ、今 K ノ元 a 及ビ $M \geq 0$ ガアツテ、スベテノ
おノ擴張ナル $\mathfrak{P}$ = 對シ

$$W_{\mathfrak{P}}(a-1) \geq M \quad (\text{又ハ } W_{\mathfrak{P}}(a) \geq M)$$

ガ成立ツトスレバ、スベテノ $K/\mathfrak{k}$ 、 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{k}$ 、中ヘノ同
型置換 σ = 對シ

$$W_{\mathfrak{P}}(a^{\sigma}-1) \geq M \quad (\text{又ハ } W_{\mathfrak{P}}(a^{\sigma}) \geq M)$$

ガ成立ツヲケデアル。

a 、 $\mathfrak{k}$ = 對シ代數的ナル故、 a 、 $\mathfrak{k}$ = 於テ満足スル
既約多項式ヲ

$$x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$$

トオケバ、 a ノ「ノルム」 $Na = (-1)^n \alpha_0$ 、 a^{σ} ノ形ノ
元ノ有限個ノ積ナル故

$$W_{\mathfrak{P}}(Na-1) \geq M \quad (\text{又ハ } W_{\mathfrak{P}}(Na) \geq M)$$

ガ成立ツ。

ソコデ 4') ヲ証明スルタメ、有限個ノ $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_m$
及ビ $M \geq 0$ ガ與ヘラレメトスル。シカフバ $\{\mathfrak{P}\}$ =
開スル條件 4) = ヨリ、 $\mathfrak{P}_1$ ノ擴張ナル $\mathfrak{P}$ = 對シテハ、
 $W_{\mathfrak{P}}(a-1) \geq M$ 、 $\mathfrak{P}_i$ ($i \neq 1$) ノ擴張ナル $\mathfrak{P}$ = 對シテハ
 $W_{\mathfrak{P}}(a) \geq M$ 、他ノ $\mathfrak{P}$ ($\neq \mathfrak{P}_i$) ノ擴張ナル $\mathfrak{P}$ = 對シテハ
 $v_{\mathfrak{P}}(a) \geq 0$ ヲ満足スル K ノ元 a ガ存在スルカラ

$$W_{\mathfrak{P}_1}(Na-1) \geq M, \quad W_{\mathfrak{P}_i}(Na) \geq M \quad (i \neq 1),$$

$$W_{\mathfrak{P}}(Na) \geq 0 \quad (\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_i)$$

ガ成立スル。即チ $Na \in \mathfrak{k}$ ガ條件 4') = 適スル元デアアル。

(注意) 上デ條件 4) が 4') デ置換ヘラレルコトヲ云
ヒマシタガ、更ニソレハソノ特別ナ場合ノ次ノ條件ト同
値デアリマス:

4') 任意ニ有限個ノ Primitivisor $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ が
與ヘラレタトキ

$$w_{\beta_1}(a-1) > 0, \quad w_{\beta_i}(a) > 0 \quad (i \neq 1),$$

$$w_{\beta}(a) \geq 0 \quad (\beta \neq \beta_i)$$

ナル K ノ元 a が存在スル。

証明ハ A. Ostrowski, Untersuchungen zur
arithmetische Theorie der Körper I, §20, S.310
(Math. Zeitsch 39) ニアル通りデ、尙單デスカラ
略シマス。