



Title	ω -寫像トBaetti 數
Author(s)	山内, 省三
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 260, p. 5-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75091
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1158 n -寫像と Betti 數

山 内 省 三 (阪大)

充分小ナル $\varepsilon > 0$ に対シテハ Kompaktheit,
Betti 數ハ ε -Abbildung デ減ジナイ。コレハ P.
Alexandroff ノ証明スル所ヲアル。⁽¹⁾ —(脚註次頁へ)—

コレヲ Bikompaaktum 1 場合ニ考ヘテ ミヨシ。

此処ヲ吾々ハ考ヘル homology theory ハ Čech⁽²⁾
ノ意味デアツテ、係數領域ハ rational number /
Körper K ヲトル。Bikompaaktum R , 與ヘテ ν
タ finite open covering $\mathcal{W} = \{O_1, O_2, \dots, O_S\}$
トスルトキ R カラ或ル空間 R' へノ連續寫像 f ハ $\mathcal{W}$ -
寫像デアルト云フノハ各点 $x' \in R'$ ニ對シテ ν ノ U_i 0
 $f^{-1}(x') \subseteq O_i$ ナル如キ $O_i \in \mathcal{W}$ ガ存在スルトデアイル。

補助定理

Bikompaaktum R ガ有限個ノ $(n-R)$ -cycles

$$Z_1^n, Z_2^n, \dots, Z_k^n$$

ガ linearly independent ナルニ R ノ homology
ヲ define スル covering / fundamental system
 Z ノ中ニ決メ如キ covering $U \in Z$ ガ存在スル。

$$\text{即チ } \sum_{i=1}^k r_i Z_i^n(U) \sim 0, \quad r_i \in K$$

ガ成立スルノハ $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$ ノトキニ限ル。

カナル U ガ存在スル。

(1) P. Alexandroff, Betti'sche Zahlen $E \rightarrow$ Abbildung,
Fund. Math. Tom. 22.

(2) E. Čech, Théorie générale de l'homologie dans
un espace quelconque, Fund. Math. Tom. 19.

証明

— 自明 —.

定理

Bikompaktum R , Betti 数 $\neq$ finite, 即ち $P^n(R) = k+1 < \infty$ トシ, 補助定理 = ヨリ與ヘラレル R , covering $\pi: W \rightarrow R$ トスル.

Bikompaktum R が連続寫像 $f =$ ヨリ他, Bi-kompaktum $R' = (auf) W$ -abbilden + レル時ハ, π の寫像 = ヨリ Betti 数ハ減ジ + イ.

証明

$P^n(R) = k+1 + \infty$ 故 = linearly independent
+ $(n-R)$ -cycles $Z_1^n, Z_2^n, \dots, Z_{k+1}^n$
及ビ補助定理 = ヨリ $W \in \mathbb{Z}$ が存在シテ

$$\sum_{i=1}^{k+1} t_i Z_i^n(W) \sim 0$$

が成立スルノハ, スベテノ係数 $t_1 = t_2 = \dots = t_{k+1} = 0$ + ルトキ = 限ル,

サテ $W = \{U_1, U_2, \dots, U_l\}$ = 對シテ R' ,
covering $W' = \{U_1, U_2, \dots, U_m\}$ が存在シ
テ各 i = 對シテ $f^{-1}(U_i) \subseteq U_c$ + ル如キ c が存
在スル。
(3)

(3) P. Alexandroff, Über die Dimension der
bikompakten Räume, C.R. URSS Vol. 26 (1940)

今 $p^n(R') \leq k$ と假定スル。

然ルトキハ高々 k ヲ, *lin. indep. + (n - R') - cycles*

$$Z_1'^n, Z_2'^n, \dots, Z_k'^n$$

及ビ $U_i' \in \mathbb{Z}'$ が存在シテ

$$\sum_1^k r_i Z_i'^n(U_i') \sim 0$$

が成立スルハ $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$ ナルトキ = 限ル。

コゝ $\mathbb{Z}'$ ハ R' の homology を define スル covering, fundamental system デアル。

今 w' ト U_i' ノ共通 refinement ヲ $v' = \{v_1, v_2, \dots, v_{m'}\}$ トスルト勿論 essential cycles $Z_1'^n(v'), Z_2'^n(v'), \dots, Z_k'^n(v') = \#$ シテ

$$\sum_1^k r_i' Z_i'^n(v') \sim 0$$

成立スルハ $r_1 = r_2 = \dots = r_k' = 0$ ノトキ = 限ル。

何者, $\pi' = P_Y(v', w')$ トスルト

$$\pi' Z_i'^n(v') \sim Z_i'^n(U_i')$$

然モ $Z_i'^n(v')$ 自身 essential = 1 ヲルカラ。

然シ, コゝデ注意スベキハ必ズシモ $p^n(v', R') \leq k$

デハ + イト云フコトデアル。

即チ *lin. indep.* + k 々, *essential cycles* $Z'_1(v'), Z'_2(v'), \dots, Z'_k(v')$ 以外 = 之等 k 々, *cycles* トハ *lin. indep.* + 関係 = アツテ然モ *essential* デ + *cycles* ノ有限個數ガ存在シ得ルコトデアル。⁽⁴⁾ 之ヲ

$$Z'_{k+1}(v'), Z'_{k+2}(v'), \dots, Z'_{k+j'}(v')$$

トスル。

今 v' ノ充命先, *refinement* $v'' \in \mathbb{Z}' =$ 對シ
 $\pi = P_r(v'', v')$ トシ, $\pi =$ ヨリ夫々 $Z'_i(v')$
 $i = 1, 2, \dots, k =$ *project* + ヲル k 々, *lin. indep.* + *essential cycles* $Z'_1(v''), Z'_2(v''), \dots, Z'_k(v'')$ トスルト

$$\pi Z'_i(v'') \sim Z'_i(v') \quad i = 1, 2, \dots, k$$

更ニ $Z'_i(v''), i = 1, 2, \dots, k$ トハ *lin. indep.* デ
 然モ *essential* デ + *cycles* 7

$$Z'_{k+1}(v''), Z'_{k+2}(v''), \dots, Z'_{k+j'}(v'')$$

トスルト

$$\pi Z'_{k+s}(v'') \sim \sum_{i=1}^k \beta_s^i Z'_i(v'), \quad s = 1, 2, \dots, j'$$

(4) コノコトハ *Kompaktum* = 對スル *Alexandroff*, *Projektion*
spektrum = 就テ起ル得ル問題デアル。

$$\text{サテ } v' = \{v_1, v_2, \dots, v_{m'}\}$$

明 = 各 v_i に対し $f^{-1}(v_i) \subseteq Q_c$ となるものが存在する。

$$\text{故に } f^{-1}(v') = v_1 = \{f^{-1}(v_1), f^{-1}(v_2), \dots, f^{-1}(v_{m'})\}$$

トスルト v_1 は w の refinement. 然るに v' と同じ $Nerv$ を興へる。

全様 = $f^{-1}(v'') = v_2$ は v_1 の refinement 且つ v'' と同じ $Nerv$ を興へる。

以下 $P_r(v'', v') = \pi$ として $P_r(v_2, v_1)$ とシテ同じ π を考へることはスル。

逆寫像 f^{-1} により

$f^{-1}(v')$ では

$$f^{-1}z'_1(v'), f^{-1}z'_2(v'), \dots, f^{-1}z'_k(v'),$$

$$f^{-1}z'_{k+1}(v'), \dots, f^{-1}z'_{k+j}(v')$$

$f^{-1}(v'')$ では

$$f^{-1}z'_1(v''), f^{-1}z'_2(v''), \dots, f^{-1}z'_k(v''), f^{-1}z'_{k+1}(v''),$$

$$\dots, f^{-1}z'_{k+j}(v'')$$

が考へられる。

所て $f^{-1}(v)$ は v の refinement となる故に $k+1$ 個の lin. indep. + essential cycles がアッ。
又 $f^{-1}(v'') =$ 龍うも全様、ことが云へる。

即ち、今 $f^{-1}(v'') =$ 於ける $k+1$ 個の lin. indep. + essential cycles を

$$\zeta_i = \sum_{\ell=1}^{k+j'} d_i^\ell f^{-1} Z'_\ell(v''), \quad i=1, 2, \dots, k+1$$

トルル。

$\pi = \text{Pr.} (f^{-1}(v''), f^{-1}(v')),$ 取り方カヲ

$$\begin{aligned} \pi \zeta_i &= \sum_{\ell=1}^{k+j'} d_i^\ell \pi f^{-1} Z'_\ell(v'') \\ &= \sum_{\ell=1}^k d_i^\ell \pi f^{-1} Z'_\ell(v'') + \sum_{s=1}^{j'} d_i^{k+s} \pi f^{-1} Z'_{k+s}(v'') \\ &\sim \sum_{\ell=1}^k d_i^\ell f^{-1} Z'_\ell(v') + \sum_{s=1}^{j'} d_i^{k+s} \sum_{t=1}^k \beta_s^t f^{-1} Z'_t(v')^{(5)} \\ &= \sum_{t=1}^k d_i^t f^{-1} Z'_t(v') + \sum_{t=1}^k \left(\sum_{s=1}^{j'} d_i^{k+s} \beta_s^t f^{-1} Z'_t(v') \right) \\ &= \sum_{t=1}^k \left(d_i^t + \sum_{s=1}^{j'} d_i^{k+s} \beta_s^t \right) f^{-1} Z'_t(v') \\ \therefore \pi \zeta_i &\sim \sum_{t=1}^k a_i^t f^{-1} Z'_t(v'), \end{aligned}$$

$$a_i^t = d_i^t + \sum_{s=1}^{j'} d_i^{k+s} \beta_s^t, \quad i=1, 2, \dots, k+1$$

即チ、之ハ $f^{-1}(v') =$ 於テ $k+1$ 个, essential cycles $\pi \zeta_i$ ガ k 个, cycles $f^{-1} Z'_1(v'), f^{-1} Z'_2(v'), \dots, f^{-1} Z'_k(v')$, linear combination トシテ表。

(5) π / 取り方反ビ $f^{-1}(v''), f^{-1}(v')$ ガ夫々 v'', v' ト同ジ

Nerv π 與ヘルコトカラ $\pi f^{-1} = f^{-1} \pi$

ハサレルコトヲ示シテキル。之ハ不可。

—— 以 上 ——

コノレポートヲ作ルニ際シテ小松先生ヨリ種々御指導ヲ賜ッタコトヲ厚ク御礼申シ上げマス。