



Title	On the Projective Normal Parameter. (A relation between M. J. Haantjes and M. K. Yano)
Author(s)	高野, 一夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 260, p. 12-17
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75092
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1159 On the Projective Normal Parameter.

(A relation between M. J. Haantjes
and M. K. Yano.

高野 一夫 (北大學生)

コレカラ我々ハ接續ガ正規デアルト云フ假定ヲシテ
考ヘテミヨウ。

n 次元ノ歐空間即チ各点ガ $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ ナル
 u -system = 依リ興ヘラレルモノヲ考ヘテ, コノ中
ニ A_0 ナル一点ヲトルト A_0 ハアル固定座標系ニ關シテ
coordinate ヲモツガ, 今ハソレヲ用ヒズニ A_0 ヲトリ
之ヲ原點ノヌウニ取扱ハウ。吾々ノ空間内ガ一点 A_0 ヲ
過サル曲線ヲ考ヘル, ソレヲ A_0 ニ於ケル切射影空間内
ニ展開シタトキ, 之ガ直線トナルヌウナ曲線ガ所謂 *Path*
デアリ, コノコトハ入トルヲ適當ニエランデ (常數デ
ハナイ。)

$$(1) \quad d^2 A_0 = \lambda d A_0 + \mu A_0$$

ヲ表ハシ得ル。¹⁾

以下 Path ヲコ, A_0 ト parameter t ノ函数 P ヲ用ヒテ,

$$\frac{d^2 P A_0}{dt^2} = 0$$

ナル形ニシマウト思フ。ヒマヲヒテヲ求メルト, ソレガ丁度 projective normal parameter トナル。

以下之ヲ脚註論文ニ做ッテノベヌ。

r ヲ parameter トシテ

$$\frac{d A_0}{dr} = \frac{du^0}{dr} A_0 + \frac{du^i}{dr} A_i$$

$$\frac{d A_i}{dr} = \omega_{jk}^0 \frac{du^k}{dr} A_0 + \omega_{jk}^i \frac{du^k}{dr} A_j$$

コノヲ ω_{jk}^λ ($\lambda = 0, i$) ノ場合ニ現ハル Pfaff 形式 ω_j^λ ノ係數ヲ, 特ニ $\omega_{jk}^0 = \pi_{jk}^0$ ナル。¹⁾

ソコデ

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} \text{ヲ求メルト}$$

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} = \left[\frac{d^2 u^0}{dr^2} + \left(\frac{du^0}{dr} \right)^2 + \pi_{jk}^0 \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} \right] A_0$$

1) Par M. K. Yuno: Les espaces a connexion projective et la Géométrie projective des Paths. These, 1938.

$$+ \left[\frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} + 2 \frac{du^0}{dr} \frac{du^i}{dr} \right] A_i$$

コ、デ

$$(2) \quad \lambda \frac{du^i}{dr} = \frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} + 2 \frac{du^0}{dr} \frac{du^i}{dr}$$

トオキ

$$(3) \quad \mu = \frac{d^2 u^0}{dr^2} + \left(\frac{du^0}{dr} \right)^2 + \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} - \lambda \frac{du^0}{dr}$$

トキトレバ

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} = \lambda \frac{dA_0}{dr} + \mu A_0 \quad \text{ト+ル。} \quad \text{之ハタシカ(1),}$$

形デアル。

即チ入テ (2) デ定メルコト = ヨリ, *Path* , 條件が成立スルカラ (2) コソ *Path* ヲ特徴付クルニ, デアル。

$$+ \text{テ} \quad \frac{d^2 p A_0}{dt^2} = 0 \quad \text{ヲ求メテミルト}$$

$$\frac{d^2 p A_0}{dt^2} = \frac{1}{t'^2} \left(p'' A_0 + 2p' \frac{dA_0}{dr} + p \frac{d^2 A_0}{dr^2} \right)$$

$$- \frac{t''}{t'^3} \left(p' A_0 + p \frac{dA_0}{dr} \right)$$

$$= \frac{p}{t'^2} \left(\frac{2p'}{p} + \lambda - \frac{t''}{t'} \right) \frac{dA_0}{dr} + \frac{p}{t'^2} \left(\frac{p''}{p} + \mu - \frac{t''}{t'} \frac{p'}{p} \right) A_0$$

ソコデ

$$\frac{2p'}{p} + \lambda - \frac{t''}{t} = 0, \quad \frac{p''}{p} + \mu - \frac{t''}{t'} \frac{p'}{p} = 0$$

＋ル條件ヲ與ヘルトキ

$$p \text{ヲ消去シ, } \{t, r\} = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2} \frac{t''^2}{t'^2} \text{トオクト}$$

$$(4) \quad \{t, r\} = \lambda' - \frac{1}{2} \lambda^2 - 2\mu$$

前述シタヤウニ (2) コノ Path ヲ定メルモノト考ヘウル
ノデアツテ, 之ヲバ $\Delta = \Delta(r)$ ナル parameter Δ ヲ
エラント

$$(5) \quad \frac{d^2 u^i}{d\Delta^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{d\Delta} \frac{du^k}{d\Delta} = 0$$

ナル形ニシヤウト思フ。

ソレニハ簡單ナ計算ニ依ツテ

$$(6) \quad \lambda = \frac{\Delta''}{\Delta'} + 2 \frac{du^0}{dr} \text{ ナルヤウニ } \lambda \text{ ヲエラベバヨイ}$$

コトガ分ル。

(4) へ (3) ヲ代入シテ

$$\frac{\{t, r\} - \{\Delta, r\}}{\Delta'^2} = \{t, \Delta\}$$

ヲ用フレバ

$$(7) \quad \{t, \Delta\} = -2 \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{d\Delta} \frac{du^k}{d\Delta}$$

ヲ得ル。

コノデ又 M. K. Yano / 脚註論文第6章ヲミルト

Π_{jk}^i + 11 affine connection, 曲率をゼロ

$$\Pi_{jkh}^i = \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial u^h} - \frac{\partial \Pi_{jh}^i}{\partial u^k} + \Pi_{jk}^m \Pi_{mh}^i - \Pi_{jh}^m \Pi_{mk}^i$$

7 i ト k = 閉シテ contract シ之ヲ Π_{jk} トオケル

$$\Pi_{jk}^0 = -\frac{1}{n-1} \Pi_{jk}$$

ナルコトが述べラレテイル。

$$\text{依ッテ } \{t, s\} = \frac{2}{n-1} \Pi_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}$$

+ 11 projective normal parameter, 表示ヲ得ル。

吾々ハ (5) / 上デ之ヲ得ヲ譯デアル。

今コゝヲ $\beta = \lambda - 2 \frac{du^0}{dr}$ トオイテミルト β ハ r / 函数

トナル。

之ヲ (2) へ入レルト

$$(2) \quad \frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} = \beta \frac{du^i}{dr}$$

トナル。

以上ヲ換言スルハ

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} &= \beta \frac{du^i}{dr} + 11 \text{ Path, 上ヲ} \\ \text{之ヲ } \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} &= 0 \text{ + シタル} \end{aligned}}$$

如キ parameter $s = s(r)$ ヲトレバ, 之ヲ
用ヒテ projective normal. parameter

$$\{t, s\} = \frac{2}{n-1} \pi_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}$$

ヲ定メルコトが出来ル。

之レハ

Proceeding of the Edinburgh Math. Society.
Second Series, Vol. 5 (1937-38)

ニ於テ

On the projective geometry of Path.

ナル表題, 下ニ

University of Edinburgh, M. J. Haantjes
ガ主トシテ與ヘテ projective normal parameter
ノ定義ニ他ナラナイ。