



Title	p 葉函數ノ性質ニツイテ
Author(s)	吉田, 徳之助
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 260, p. 17-21
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75093
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1160 p 葉函数ノ性質ニツイテ

吉田徳之助

茲ニ Bieberbach ノ面積定理ヲ少シク拡張スレバ

-17-

p 葉函数ノ性質ガ一ニ出テ来ルコトヲ述ベテミタイト思ヒマス。先ツ

$$W(Z) = Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots$$

ヲ $1 < |Z| < \infty$ デ正則デ $\{W(Z)\}^p$ ガ $1 < |Z|$ デ p 葉デアルトスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1$$

ガ成立スルコトヲ証明シマス。

$r > 1$ トスル。 R ヲ十分大ニスレバ $W = W(Z) = 0$ ノ内 $|Z| = R$ ノ像 C_R ハ単一閉曲線トナリ内 $|Z| = r$ ノ像ヲソノ内部ニ含ム。 C_R デ囲マレタル範囲ノ面積ヲ $A(R)$ トシ内環 $r < |Z| < R$ ノ像 $B(r, R)$ ノ面積ヲ重ナレル部分ハ、ソノ度数タテ計算シテ $A(r, R)$ トスル。

$$\{W(Z)\}^p \text{ハ } p \text{葉デアルカラ } \prod_{\nu=0}^{p-1} (W(Z) - de^{\frac{2\nu\pi i}{p}}) = 0$$

ノ $r < |Z| < R$ ニ於ケル根ノ個數ハ p ヲ超ヘルコトガナイ。ソレ故点ノ上デ $B(r, R)$ ガ k 重ニ重ナツテナルモ、トスレバ $(p-1)$ 個ノ点 $de^{\frac{2\pi i}{p}}, de^{\frac{4\pi i}{p}}, \dots, de^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}}$ ノ上デノ少クトモ $(k-1)$ 個ノ点ノ上ニハ $B(r, R)$ ノ点ガナイコトニナル。ソレ故

$$A(r, R) \leq A(R)$$

ガ成立スル。

$A(r, R), A(R)$ ヲ計算スレバ

$$\begin{aligned}
 A(r, R) &= \int_r^R \int_0^{2\pi} |w'(re^{i\theta})| r d\theta dr \\
 &= \pi \left(R^2 - \frac{|a_1|^2}{R^2} - \frac{2|a_2|^2}{R^4} - \dots \right) - \pi \left(r^2 - \frac{|a_1|^2}{r^2} - \frac{2|a_2|^2}{r^4} - \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int u(\theta) dv(\theta) \quad (u(\theta) + iv(\theta) = w(Re^{i\theta})) \\
 &= \pi \left(R^2 - \frac{|a_1|^2}{R^2} - \frac{2|a_2|^2}{R^4} - \dots \right)
 \end{aligned}$$

トナルカラ

$$\left(r^2 - \frac{|a_1|^2}{r^2} - \frac{2|a_2|^2}{r^4} - \dots \right) \geq 0$$

$$r \rightarrow 1 \text{ トシテ } \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1 \text{ ヲ得ル。}$$

コレヲ p -葉函数 = 應用シテ次ノ結果ヲ得マス。

$$w(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots + a_n z^n + \dots$$

ガ $|z| < 1$ ナ正則且ツ p -葉デアールトキ

$$|a_{p+1}| \leq 2p$$

及ビ

$$|w(z)| \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}$$

ガ成立スル。

$$f(z) = \{w(z^{-2})\}^{-\frac{1}{2p}} = z + \frac{c_1}{z} + \dots \text{ トスルベシ}$$

$f(z)$ は $1 < |z| < \infty$ で正則トナリ $\{f(z)\}^{2p}$ は $1 < |z|$
 で $2p$ 葉トナリ $C_1 = -\frac{a_{p+1}}{2p}$ トナル。前述 = ヲリ $\sum n|C_n|^2$
 ≤ 1 ナル故 $|a_{p+1}| \leq 2p$ ナル。

$$g(z) = \{w(z^{-1})\}^{-\frac{1}{p}} = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_n}{z^n} + \dots$$

トスレバ $g(z)$ は $1 < |z| < \infty$ で正則トナリ $\{g(z)\}^p$
 は $1 < |z|$ で p 葉トナル。従ッテ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

$|z| > \sqrt{2}$ トスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|z|^{2n+2}} < 1$$

故 = Schwarz, 不等式ヲ用ヒテ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|b_n|}{|z|^{n+1}} < 1$$

$|z_1| \geq |z_2| > \sqrt{2}$ トスレバ

$$\left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = \left| 1 - \frac{b_1}{z_1 z_2} - \dots - \left(\frac{1}{z_1^n z_2} + \frac{1}{z_1^{n-1} z_2^2} + \dots + \frac{1}{z_1 z_2^n} \right) b_n \right. \\ \left. - \dots \right|$$

$$\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|b_n|}{|z_2|^{n+1}} > 0$$

従ッテ $g(z)$ は $\sqrt{2} < |z|$ で單葉トナル。故 = $\{w(z)\}^{\frac{1}{p}}$ は
 $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ で正則且ツ單葉トナリ Koebe, 定理ヲ用ヒレ
 バ $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ で

$$\left| \{w(z)\}^{\frac{1}{p}} \right| \geq \frac{|z|}{(1+\sqrt{2}|z|)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

が成立スル。 $\{w(z)\}^{\frac{1}{p}}$ は $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ で単葉で $w(z)$ は $|z| < 1$ で p 葉カアルカラ $1 > |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ で

$$\left| \{w(z)\}^{\frac{1}{p}} \right| > \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

が成立スル。 従って $|z| < 1$ で

$$|w(z)| \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}$$

が成立スル。