OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	代數方程式ノ根ノ限界ニ就キテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 260, p. 21-24
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75094
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1161. 代數方程式ノ根ノ限界ニ就キテ

春水　博（神戸高等商船学校）

（定理）　實係數ヲ有スル n 次ノ代數方程式

$$f(Z)=a_0Z^n+a_1Z^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

ガ、角領域 $\frac{\pi}{n}>\alpha>amp.(Z)>0$ ニ於テ、根 Z_0 ヲ有スルトキ

$$M=\max_{1\leqq k\leqq n}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|<\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}}$$

ナラバ

$$|Z_0|<1$$

デアル。

(証明) $Z_0=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ トオケバ

$$\frac{\pi}{n}>\alpha>\theta>0$$

コノ Z_0 ヲ $f(Z_0)=0$ ヘ代入スレバ 左辺ノ虚数部ハ 0トナリ、又 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ハ仮定ニヨリ実数ナル故

$$g(r)=a_0\sin n\theta\, r^n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\sin k\theta\, r^k=0 \cdots\cdots (1)$$

$\pi>n\theta>0$ ナルコトカラ $|\sin k\theta|=\sin k\theta$ ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) ナル故、且ツ又

$$\max_{1\leqq k\leqq n}|a_k|=|a_0|M$$

ナル故

(1) ヨリ $|g(r)|\geqq|a_0|\sin n\theta\, r^n-|a_0|M\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\, r^k$

コンデ、間接法ニヨリ $|Z_0|=r\geqq 1$ トスレバ

$$r^n\geqq r^k \quad (k=1,2,\cdots\cdots,n-1)$$

ナル故

$$|g(r)|\geqq|a_0|\sin n\theta\, r^n-|a_0|Mr^n\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\theta$$

シカルニ

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

ナル故

$$|g(r)| \geqq |a_0| r^n \left(\sin n\theta - M \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)$$

故ニ $$|g(r)| \geqq \frac{|a_0| r^n \sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2} - \sin\frac{(n-1)\theta}{2} M \right)$$

右辺ガ正ニナルヤウニスルニハ $\frac{\pi}{n} > \alpha > \theta_1 > 0$ トルスベテノ θ ニ対シ

$$M < \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{(n-1)\theta}{2}}$$

ナル如ク M ヲトレバヨイ。ソレニハ右辺ノ最小値ヲ求ムレバヨイ。

コノ不等式ノ右辺ヲ $k(\theta)$ トオケバ

$$k'(\theta) = \frac{\sin n\theta - n\sin\theta}{2\sin^2\frac{(n-1)\theta}{2}}$$

故ニ $\frac{\pi}{n} > \alpha \geqq \theta > 0$ トルθニ対シ $k'(\theta) < 0$

故ニ $k(\theta)$ ハ $\alpha \geqq \theta > 0$ ニ於テ減小函数ナル故 $k(\theta)$ ハ $0 < \theta \leqq \alpha$ ニテハ $\theta = \alpha$ ノトキ最小値ヲ取ル。

従ッテ $$M < \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}}$$

トスレバ $|g(r)|>0$

是ハ $g(r)=0$ ト矛盾スル。

矛盾ノ原因ハ $|Z_0|=r\geq 1$ デアルカラ $r<1$

即チ $|Z_0|<1$

——————(完)——————