



Title	分布函数ノ漸近展開ニツイテ
Author(s)	宮澤, 光一
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 260, p. 24-34
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75095
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1162. 分布函数ノ漸近展開ニツイテ

宮澤光一 (小樽高専)

分布函数ノ *Charlier* 式展開ニ於ケル近似評價ヲ求メヨトスルモノナリ。

X_1, X_2, \dots, X_n ヲ独立確率変数列トシ、コレラハ同一分布函数 $F(x)$ ヲモテ、 $F(x)$ ハ平均値 0, 標準偏差 σ , 三心次数 $k (\geq 3)$, 絶対態率 β_k ヲモツモノトス。

$F(x)$ ノ特性函数ヲ $f(t)$, 変数 $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}\sigma$ ノ分布函数ヲ $F_n(x)$, 特性函数ヲ $f_n(t)$ トスルニ

$$f_n(t) = \left\{ f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \right\}^n \text{ナリ。}$$

更ニ特性函数 $f(t)$ ハ $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$

上の条件ヲ満たスモノトス,

コノトキ, $\mathcal{F}_n(x)$ = 関シテ, 漸近展開式ヲ得ル.

[定理] $\mathcal{F}_n(x)$ ハ次ノ如ク展開サレル.

$$\mathcal{F}_n(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=3}^{k-1} (-1)^\nu A_{\nu n} \frac{\Phi^{(\nu)}(x)}{n^{\nu/2}} + R_{kn}(x)$$

$$k = 3\ell \text{ ノトキハ } |R_{kn}(x)| < \frac{M}{n^{\ell/2}}$$

$$k = 3\ell + 1, k = 3\ell + 2 \text{ ノトキハ}$$

$$|R_{kn}(x)| < \frac{M}{n^{\frac{\ell+1}{2}}}$$

コノ

$$\textcircled{1} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \Phi^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu \Phi(x)}{dx^\nu}$$

$$\textcircled{2} \quad A_{\nu n} = \sum_{\alpha} \left(\frac{n \lambda_\alpha}{\alpha!} \right)^\beta \frac{1}{\beta!}$$

\sum_{α} ハ ν ノ約數 α ($\geq 3 + \nu \in 1$) = ツイテ加ヘルモノ
ニシテ $\beta = \nu/\alpha + 1$. 又 $\lambda_\alpha = \frac{\gamma_\alpha}{\alpha^2}$ トシ, $A_{\nu n}$ ハ $n = \nu$
イテハ高々 $\nu/3$ ($< \frac{\nu}{2}$) 次ナリ.

$\textcircled{3}$ M ハ k 及ビ $F(x) = 1$ ニ從屬シテ及ビ x トハ無
關係ナル常數ナリ.

本定理ノ系トシテ次ガ成立スル.

系. モシ β_3 ガ有限ヲ存在スレバ, 上定理テ $k=3$.

＋ル故

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < \frac{M}{\sqrt{n}}$$

が成立スル。

Cramer (Random variables and Probability distribution), 方法 = +ラツテ、本定理ヲ証明スルコト = スル。

θ ヲ以テ $|\theta| \leq 1$ +ル或ル常数, θ_k ヲモツテ $|\theta_k|$ が k 大ニ $F(x) = 1$ ニ従属スル或ル一定数ヨリ小ナル如キ或ル数ヲ表ハスニトス。先ツ次, Lemma カヲ証スル。

Lemma. 1. $|z| \leq \sqrt[n]{6} + \nu$ トキ

$$e^{\frac{z^2}{2}} f_n(z) = 1 + \sum_{\nu=3}^{k-1} A_{\nu n} \left(\frac{iz}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + R_k$$

コトニ

$k = 3l$, トキ

$$R_k = \theta_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l \cdot |z|^k$$

$k = 3l+1$, トキ

$$R_k = \theta_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+1} (|z|^k + |z|^{k+2})$$

$k = 3l+2$, トキ

$$R_k = \theta_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+1} (|z|^k + |z|^{k+1})$$

(証明) β_k が有限に存在スル故、次ノ展開ヲ得ル。

$$(1) f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 + \sum_{\nu=2}^{k-1} \frac{\alpha_\nu}{\nu!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^\nu + \theta \frac{\beta_k}{k!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^k$$

$$\text{コレヲ} = 1 + P$$

トオク。然ラバ次ノ如ク書ケル。

$$(2) \log(1+P) = \sum_{1 \leq j < \frac{k}{2}} (-1)^{j+1} \frac{P^j}{j} + \Theta_k P^{\frac{k}{2}}$$

而シテ、 P ハ形式的ニハ t ノ多項式ニシテ、ソノ優級數ハ

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\beta_k^{1/k} |t|}{\sqrt{n}\sigma} \right)^\nu$$

ナリ。ヨツテ $1 \leq j < \frac{k}{2}$ ニ對シテ

$$P^j = \sum_{\nu=2j}^{k-1} \delta_{\nu j} \left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^\nu + \theta \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{j \beta_k^{1/k} |t|}{\sqrt{n}\sigma} \right)^\nu$$

$$= \sum_{\nu=2j}^{k-1} \delta_{\nu j} \left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^\nu + \Theta_k \left(\frac{j \beta_k^{1/k} |t|}{\sqrt{n}\sigma} \right)^k$$

$$= \sum_{\nu=2j}^{k-1} \delta_{\nu j} \left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^\nu + \Theta_k \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

コトニ、 $\delta_{\nu j}$ ハ t ト無關係ナリ。

カクテ (1), (2) ヨリ $\log f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$ ハ it ノ幕ニ $(it)^{k-1}$ ヲテ展開出来、剩餘ハ $O(t^k)$ ナリ。又、半不変係數ノ定義カラ、コノ展開ニ於ケル $\left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^\nu$ ノ係數ハ $\gamma_\nu / \nu!$ ナリ。ヨツテ

$$\log f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \sum_{\nu=2}^{k-1} \frac{\gamma_{\nu}}{\nu!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^{\nu} + \mathcal{O}_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

$$\therefore \log f_n(t) = n \log f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$= n \sum_{\nu=2}^{k-1} \frac{\gamma_{\nu}}{\nu!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^{\nu} + \mathcal{O}_k n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \sum_{\nu=3}^{k-1} \frac{n\lambda_{\nu}}{\nu!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + \mathcal{O}_k n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

$$\therefore Q = \log e^{\frac{t^2}{2}} f_n(t)$$

$$= \sum_{\nu=3}^{k-1} \frac{n\lambda_{\nu}}{\nu!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + \mathcal{O}_k n \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

ヨツテ, e^Q 7 it/\sqrt{n} 1 冪 = $(it/\sqrt{n})^{k-1}$ 2 テ展開
シテ

$$e^Q = e^{\frac{t^2}{2}} f_n(t)$$

$$= 1 + \sum_{\nu=3}^{k-1} A_{\nu n} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + R(t)$$

トオケバ, $A_{\nu n}$ ハ定理ノ如ク與ヘラレルコトヲ知ル。

$R(t)$ 7 評價スルタメ, Q 1 優級數ヲ求ムレバ

$$\mathcal{O}_k \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{n}{\nu!} \left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}$$

即チ $\mathcal{O}_k \frac{|t|^3}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}$

デ與ヘラレル。ヨツテ Q 1 優級數ヲ求ムレバ

$$\textcircled{H}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j |t|^{3j} \sum_{\nu=0}^{3j} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{j|t|}{\sqrt{n}} \right)^\nu$$

ナリ、

今、 $k = 3l$ 、トキヲ考ヘルニ (然ラザルトキノ結果ニツイテモ同様ニ証明出来ル) 次ノ展開式

$$e^Q = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{Q^j}{j!} + \theta Q^l e^{|Q|}$$

$$= \text{於テ } |t| \leq \sqrt[n]{b} \text{ ナルトキ}$$

$$|Q| < \textcircled{H}_k (\sqrt[n]{b})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \textcircled{H}_k$$

ナルコトヲ考ヘテ、 $e^Q =$ 於ケル t^k 以上ノ項ハ、各 Q^j デ生ズル t^k 以上ノ項ニツキ整頓シタモノナリ。即チ

$$R(t) = \textcircled{H}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l \cdot |t|^k$$

q. e. d.

Lemma 1 テ $(it)^\nu$ ノ代リニ、 $(-1)^\nu \Phi^{(\nu)}(x)$ ヲ用ヒテ次式ヲ考ヘル。

$$\mathcal{F}_n(x) = \Phi + \sum_{\nu=3}^{k-1} (-1)^\nu A_{\nu n} \frac{\Phi^{(\nu)}}{n^{\nu/2}} + R_{kn}(x)$$

$$f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{\nu=3}^{k-1} A_{\nu n} \frac{(it)^\nu}{n^{\nu/2}} + r_{kn}(t)$$

トオケルニ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mathcal{F}_n(x) = f_n(t), \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(\nu)}(x) = (-it)^\nu e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ナコトカラ

$$\gamma_{k,n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dR_{k,n}(x)$$

而シテ, Lemma 1 カラ, $t=0$ 1 近ク $\gamma_{k,n}(t) = O(t^k)$

ナリカラ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^j dR_{k,n}(x) = 0 \quad \text{for } j = 0, 1, \dots, k-1$$

コトヲ, $0 < w < k$ ナリトキ, w 次ノ積分 = 閉ル

Cramerノ定理ヨリ

$$J_w R_{k,n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}} \gamma_{k,n}(t) dt$$

コノ閉ルハ $w=0$ ノトキ, 右辺ノ積分ガ絶対収斂ナリ

$w=0$ ナリシテモ成立ス。

コレヲ用ヒテ, 次ノ Lemma 2ヲ証ス。

Lemma 2. $0 \leq w \leq k-1$ ナリシテ次ヲ得。

$$J_w R_{k,n}(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}} f_n(t) dt + R$$

コトニ

$$k = 3l, \quad l \neq$$

$$R = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l$$

$$k = 3l+1, \quad k = 3l+2, \quad l \neq$$

$$R = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+1}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
 J_w R_{kn}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}} Y_{kn}(t) dt = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_0^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}} Y_{kn}(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(it)^{w+1}} F_n(t) dt \\
 &\quad + \theta \left\{ \int_0^{\sqrt{n}} \frac{|Y_{kn}(t)|}{t^{w+1}} dt + \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{|F_n(t)|}{t^{w+1}} dt + \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{|Y_{kn}(t) - F_n(t)|}{t^{w+1}} dt \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}} f_n(t) dt + \theta(A_1 + A_2 + A_3)
 \end{aligned}$$

$k = 3l$ のときのみを証明する。(然らざれば同様 = 証明)

$$A_1 = \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l \int_0^{\infty} \frac{t^k}{t^{w+1}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l$$

$$|t| \leq \sqrt{n} \text{ のとき } |f_n(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{3}} \text{ なることが用いられる}$$

$$A_2 < \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{3}}}{t^{w+1}} dt < \int_{\sqrt{n}}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{3}} dt = \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{3\sqrt{n}}} = \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l$$

$$1 + \sum_{\nu=3}^{k-1} A_{\nu} \frac{(it)^{\nu}}{n^{\nu/2}} = \mathcal{O}_k(1 + t^k)$$

$$\therefore A_3 = \mathcal{O}_k \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{1 + t^k}{t^{w+1}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l$$

ゆえに Lemma 2 が証明された。

f. e. d.

(定理の証明)

Lemma 2 から、個々の $k = 3l$ のときのみ (然らざれば)

ルトキも同様ニ証サレ)

$$\left| J_w R_{kn}(x) \right| < \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{|f_n(t)|}{t^{w+1}} dt + \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l$$

ココデ t の代りに $\sqrt{n}\sigma t$ を用ヒレバ

$$= \sigma^{-w} n^{-\frac{w}{2}} \int_{1/\sigma}^{\infty} \frac{|f_n(\sqrt{n}\sigma t)|}{t^{w+1}} dt + \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l$$

而シテ $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$ ナル條件カラ $t > 1/\sigma$ ナルト

キ、 $c > 0$ ナリシテ $|f(t)| < e^{-c}$ ナル t を求ムルコト
が出来ル。

$$\text{又 } f_n(\sqrt{n}\sigma t) = \{f(t)\}^n$$

$$\therefore \left| J_w R_{kn}(x) \right| < \sigma^{-w} n^{-\frac{w}{2}} \int_{1/\sigma}^{\infty} \frac{e^{-cn}}{t^{w+1}} dt + \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l$$

$$= \sigma^{-w} n^{-\frac{w}{2}} e^{-cn} \left[-\frac{t^{-w}}{w} \right]_{1/\sigma}^{\infty} + \mathcal{O}_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^l$$

$$< M \left(\frac{e^{-cn}}{w} + n^{-\frac{l}{2}} \right)$$

ココニ、 M ナル及ビ $F = 1$ ナル從屬シテ、 x, w トハ無關係
ナル常數ナリ。

コトヲ

$0 < w < 1$ トシ、 $h > 0$ ナリシテ $M. Riesz$ ノ定理
カラ次ヲ得。

$$(3) \left| \frac{1}{\Gamma(w)} \int_{x-h}^x (x-t)^{w-1} R_{kn}(t) dt \right| < M \left(\frac{e^{-cn}}{w} + n^{-l/2} \right)$$

そこで $h = n^{-\frac{l}{2}}$, $v = 1/\log n$ とおける

$$|R_{K_n}(x)| < M \cdot n^{-\frac{l}{2}}$$

を得る。

q. e. d.