



Title	Gauss型確率変數系二就テ
Author(s)	伊藤, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 261, p. 35-43
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75096
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1163 Gauss 型確率変数系 = 就テ

伊 藤 清 (名大)

§1. (Ω, P) が確率空間トスルトキ, (Ω, P) 上ノ實確率変数ヲ有限ノ二次ノ moment ヲ持ツモノ全体ハ $L^2(\Omega, P)$ ヲアル。今 $\mathcal{M} (\subseteq L^2(\Omega, P))$ ノ中カラ作ツタ任意ノ一次結合ガ Gauss 分布ニ従フトキニ, $\mathcal{M}$ ヲ Gauss 型 (又ハ簡單ニ G 型) トイフコトニスル。明ラカニ

定理1 $\mathcal{M}$ ノ各元ガ Gauss 分布ニ従ヒ、且ツ独立ナル時ニハ, $\mathcal{M}$ ハ G 型ナリ。

定理2 $\mathcal{M}$ ガ G 型ナラバ, $L(\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}$ ノ張ル線型集合体) 及ビ $\overline{\mathcal{M}}$ ($\mathcal{M}$ ノ閉核) ハ共ニ G 型ナリ。

定理3 $\mathcal{M}$ ガ G 型ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in L(\mathcal{M}),$$

$$r(x_i, x_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

ナラバ必ず $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 且トナルコトナリ。

茲ニ r ハ相関係数ヲアラハシ 且ハ独立ヲ示ス。

(証明) 1. 必要性. $\mathcal{M}$ ガ G 型ナルコトカラ, (1) ノ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ガ独立ナルコトヲイフ。ソレニハ任意ノ實数 $t_1, t_2, \dots, t_n$ ニ對シテ

$$(2) \quad m(e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)}) = \prod_k m(e^{i t_k x_k})$$

ナルコトがイヘレバヨイ。 m が G 型ナル故, $\sum t_k x_k$ ハ Gauss 分布ニ従ヒ, $\therefore$, 平均値ハ $\sum t_k m(x_k)$ 標準偏差ハ $\sum_{k,j} t_k t_j \sigma(x_k) \sigma(x_j) r(x_k, x_j)$

$$= \sum_k t_k^2 \sigma^2(x_k)$$

故ニ (2), 左辺 $= \exp \left\{ i \sum_k t_k m(x_k) - \frac{1}{2} \sum_k t_k^2 \sigma^2(x_k) \right\}$

$$= \prod_k \exp \left\{ i t_k m(x_k) - \frac{1}{2} t_k^2 \sigma^2(x_k) \right\}$$

$$= \prod_k m(e^{i t_k x_k})$$

2. 充分性. $m' \equiv \{x - m(x); x \in m\}$ が G 型ナルコトヲイヘバヨイ。 (1) ヲ書キカヘテ $(x'_i = x_i - m(x_i))$

$$(1) \quad x'_1, x'_2, \dots, x'_n \in L(m'),$$

$$(x'_i, x'_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

ヲラベテ $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ 上, 茲ニ (x'_i, x'_j) ハ内積ヲ表ハス。

$L(m')$ ノ完全正規直交系ヲ $\{\varphi_\alpha\}$ トスル。 $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$, $(\alpha \neq \beta)$ ナル故ニ (1') = ヨリ $\{\varphi_\alpha\}$ 上。 猶ニ m' が G 型ナルコトヲイフニハ, $\{\varphi_\alpha\}$ が G 型ナルコトがイヘレバヨイ。 ($m' \subseteq L\{\varphi_\alpha\}$, 定理 2 = 注意)。 $\therefore$ φ_α が Gauss 分布ニ従フコトヲイヘバヨイガ, $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ ノ分布法則ノ特性函数 $F(t, S)$ が

$$e^{-\frac{t^2 + S^2}{2}}$$

ナルコトがイヘレバ尚更充分デアアル。 サテ, 明

ヲカニ

$$F(t, s) = m(e^{it\varphi_\alpha + is\varphi_\beta})$$

$$\text{今, } t_1, t_2 + s_1, s_2 = 0 + \text{ヲバ}$$

$$(t_1, \varphi_\alpha + s_1, \varphi_\beta, t_2, \varphi_\alpha + s_2, \varphi_\beta) = t_1, t_2 + s_1, s_2 = 0$$

$$\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in L(m')$$

$$\text{故} = t_1, \varphi_\alpha + s_1, \varphi_\beta \perp t_2, \varphi_\alpha + s_2, \varphi_\beta \quad (\text{假定 (1)})$$

$$\text{故} = F(t_1 + t_2, s_1 + s_2)$$

$$= m(e^{i(t_1 + t_2)\varphi_\alpha + i(s_1 + s_2)\varphi_\beta})$$

$$= m(e^{it_1\varphi_\alpha + is_1\varphi_\beta}) m(e^{it_2\varphi_\alpha + is_2\varphi_\beta})$$

$$= F(t_1, s_1) F(t_2, s_2)$$

$$\text{故} = (3) \quad (t_1, t_2 + s_1, s_2) = 0 \longrightarrow F(t_1 + t_2, s_1 + s_2)$$

$$= F(t_1, s_1) F(t_2, s_2)$$

コレカヲ $F(t, s)$ ハ連續性等ヲ考慮シテ,

$$F(t, s) = e^{-\frac{t^2 + s^2}{2}} \quad \text{ヲ得ル。}$$

§2. $M = \{x_\alpha; \alpha \in A\}$ が G 型トスル。今

$$(4) \quad \mu(\alpha) = m(x_\alpha)$$

$$\rho(\alpha, \beta) = (x_\alpha - m(x_\alpha), x_\beta - m(x_\beta))$$

ト定義スル。明ヲカニ $\rho(\alpha, \alpha) = \sigma^2(x_\alpha)$,

$$\rho(\alpha, \beta) = \sigma(x_\alpha)\sigma(x_\beta), \quad r(x_\alpha, x_\beta)$$

定理4 $\rho(\alpha, \beta) \in A \times A$ 上, real positive

definite function + 11.

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad \rho(\alpha, \beta) &= (x_\alpha - m(x_\alpha), x_\beta - m(x_\beta)) \\ &= \rho(\beta, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \rho(\alpha_k, \alpha_j) \xi_k \bar{\xi}_j &= \left\| \sum (x_{\alpha_k} - m(x_{\alpha_k})) \xi_k \right\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

定理5 $m = \{x_\alpha; \alpha \in A\}$ γ (Ω, P) , $\perp$, G
型確率変数トシ、 $m' = \{x'_\alpha; \alpha \in A\}$ γ (Ω', P')
(コレハ (Ω, P) ト同ジデモヨイ) , $\perp$, G 型確率変数系
トスル。

$$(5) \quad m(x_\alpha) = m(x'_\alpha)$$

$$(6) \quad (x_\alpha - m(x_\alpha), x_\beta - m(x_\beta)) = (x'_\alpha - m(x'_\alpha), x'_\beta - m(x'_\beta))$$

ナラバ、 R^A , 任意ノボレル集合 E = 對シテ

$$\begin{aligned} (7) \quad P\{\omega; (x_\alpha; \alpha \in A) \in E\} \\ = P'\{\omega'; (x'_\alpha; \alpha \in A) \in E\} \end{aligned}$$

(証明) (7) , 成リ = , 任意ノ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$
及ビボレル集合 $E_n (\subseteq R^n)$ = 對シテ

$$\begin{aligned} (7') \quad P\{\omega; (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \in E_n\} \\ = P'\{\omega'; (x'_{\alpha_1}, \dots, x'_{\alpha_n}) \in E_n\} \end{aligned}$$

カイヘレバヨイ。簡單ナキヤ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ナ夫々1,
2, $\dots, n$ = テ表ハシテオク。又 (5) = ヨリ

$m(x_\alpha) = m(x'_\alpha) = 0$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。而
テ、(6) ハ $(x_\alpha, x_\beta) = (x'_\alpha, x'_\beta)$ トナル。 $\perp$ $\{x_1, x_2,$
 $\dots, x_n\}$, $\perp$, 完全正規直交系ヲ $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$

$$\text{トシ, } \varphi_p = \sum_q a_{pq} x_q, x_q = \sum_p b_{qp} \varphi_p \text{ トスル。}$$

$$\text{今, } \varphi'_p \equiv \sum_q a_{pq} x'_q \text{ ト定義スルベ}$$

$$\begin{aligned} \|x'_q - \sum_p b_{qp} \varphi'_p\|^2 &= \|x'_q - \sum_{p,r} b_{qp} a_{pr} x'_r\|^2 \\ &= \|x'_q - \sum_{p,r} b_{qp} a_{pr} x_r\|^2 \\ &\quad (\because (x_\alpha, x_\beta) = (x'_\alpha, x'_\beta)) \\ &= \|x'_q - \sum_p b_{qp} \varphi_p\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{故} = x'_q = \sum_p b_{qp} \varphi'_p$$

$$\text{又, 同様} = (\varphi'_p, \varphi'_q) = (\varphi_p, \varphi_q) = \delta_{pq}$$

故 = $\{\varphi'_p\}$ ハ $L(m')$ ノ上ノ完全正規直交系ナリ。

M カ G 型, 従ッテ定理 2 = ヨリ $L(m)$ カ G 型。

$\varphi_p \in L(m)$ ナル故 $\{\varphi_p\}$ カ直交系ナルコトカラ, 定理 3

(必要性ノ方) = ヨリ $\{\varphi_p\} \perp$. 同様 = $\{\varphi'_p\} \perp$.

故 =

$$\begin{aligned} &P\{\omega; (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in E_m^*\} \\ &= \int \dots \int_{E_m^*} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}{2}} d\xi_1 \dots d\xi_m \\ &= P\{\omega'; (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_m) \in E_m^*\} \end{aligned}$$

コノ式 = 於テ

$$E_m^x \equiv \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m); (\sum_p b_{qp} \lambda_p; q=1, 2, \dots, n) \in E_n\}$$

ト置イテ見レバ, γ レハ (η') ヲ意味スル。

定理6 $\mu(\alpha)$ ヲ A , 上ノ任意ノ實函数, $\rho(\alpha, \beta)$ ヲ $A \times A$, 上ノ任意ノ *real positive definite function* トスル。

而ラバ適當ノ確率空間 (Ω, P) , 上ニ適當ノ G 型確率変数系 $\mathcal{M} = \{x_\alpha; \alpha \in A\}$ ヲ定義シ,
 $\mu(\alpha) = m(x_\alpha)$, $\rho(\alpha, \beta) = (x_\alpha - m(x_\alpha), x_\beta - m(x_\beta))$
 ナラシメ得ル。

(証明) $\mu(\alpha) = 0$ ($\alpha \in A$) トシテ一般性ヲ失ハナイ。

(コノ場合ノ系ヲ $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ トシ、 $\mathcal{M}' = \{x_\alpha + \mu(\alpha); \alpha \in A\}$ ヲ考ヘルト, コレガ一般ノ場合ノ系トナッテ可ルカラ)

I. A が有限集合ノ時。 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ トスル。

假定ニヨリ $(\rho(\alpha\beta))$ ハ *positive definite symmetric n^2 -matrix* ナル故, 同様ノ *matrix* $(\lambda_{\alpha\beta})$ ヲ求メテ,

$$(\lambda_{\alpha\beta})(\lambda_{\alpha\beta})^* = (\rho(\alpha\beta))$$

ナラシメ得ル。コノ $*$ ハ *transposed matrix* ヲ示ス。

今 R^n , 上ニ P^n 7 次ノ如ク定義スル。

$$P^n(E_n) = \int_{E_n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{2}} d\xi_1 \dots d\xi_n$$

今 $\omega = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ に対して $\varphi_k(\omega) = \xi_k$ と定義スルベ, (R^n, P^n) 上テ, φ_k ハ Gauss 分布 (実ハ正規分布) 一様ニ, $\{\varphi_k\}$ $\perp$ ナル故 $\{\varphi_k\}$ ハ G 型ナリ。コノ際 $m(\varphi_k) = 0$, $(\varphi_k, \varphi_j) = \delta_{kj}$ ハ明ラカ。

今, $x_\alpha \equiv \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha\beta} \varphi_\beta$ トスルベ $\{x_\alpha\} \in L(\{\varphi_k\})$ ナル故, $\{x_\alpha\} \in$ 亦 G 型ナ $m(x_\alpha) = \sum \lambda_{\alpha\beta} m(\varphi_\beta) = 0$,
 $(x_\alpha, x_\beta) = \sum_{r,s} \lambda_{\alpha r} \lambda_{\beta s} (\varphi_r, \varphi_s) = \sum_r \lambda_{\alpha r} \lambda_{\beta r} = \rho(\alpha, \beta)$.

II. A が無限集合ノ時. B $\supset$ A, 任意ノ有限 (n 個) 部分集合トスル。 $\rho(\alpha, \beta) \in B \times B$ 上テ勿論 positive definite ナル故, I = $\exists$ リ, (R^n, P^n) 上ノ G 型確率変数系 $\{x_\beta^B; \beta \in B\}$ $\supset$ 定義シテ

$$m(x_\beta^B) = 0, (x_\beta^B, x_\gamma^B) = \rho(\beta, \gamma) \text{ ナラシメ得ル.}$$

サテ R^A 上ニ次ノ如キ函数系 $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ $\supset$ 定義スル。

$\omega = (\xi_\alpha; \alpha \in A) (\in R^A)$ ナラバ $x_\alpha(\omega) = \xi_\alpha$ 諸テ R^A ノ子集合ニ對シテ次ノ如キ P_B $\supset$ 定義スル。

$$\begin{aligned} & P_B \{ \omega; (x_\beta(\omega); \beta \in B) \in E_n \} \\ &= P^{(n)} \{ (\xi_1, \dots, \xi_n); (x_\beta^B; \beta \in B) \in E_n \} \end{aligned}$$

而シバ $\{x_\beta; \beta \in B\}$ は確率空間 (R^A, P_B) / 上、確率変数系デアツテ、 $\{x_\beta^B; \beta \in B\}$ が G 型ナル故、コレモ亦 G 型ナリ。今 $B \subseteq C$ ナル時

$$\begin{aligned} (8) \quad P_C \{ \omega; (x_\beta(\omega); \beta \in B) \in E_n \} \\ = P_B \{ \omega; (x_\beta(\omega); \beta \in B) \in E_n \} \end{aligned}$$

が証明出来ルバ、Kolmogoroff / 定理ニヨリ、スベテノ P_B ト矛盾シナイ確率 P ヲ R^A / 上ニ定義シ得ル。

(8) ヲ証明スルタメニハ前定理5ヲ用ヒル。 $\{x_\beta; \beta \in B\}$ ハ $\{R^A, P_B\}$ / 上ヲ考ヘテモ、 $\{R^A, P_C\}$ / 上ヲ考ヘテモ、 G 型デアツテ、 $\therefore$ 平均値ハ何レモ0。

$$\begin{aligned} (x_\beta, x_{\beta'})_{P_B} &= (x_\beta^B, x_{\beta'}^B) = \rho(\beta, \beta') \\ &= (x_\beta^C, x_{\beta'}^C) = (x_\beta, x_{\beta'})_{P_C} \end{aligned}$$

茲ニ P_B ナル添字ハ内積ヲ作ル場合ニ P_B - 測度ヲ基トシタコトヲ示ス。故ニ前定理5ニヨリ (8) が成立スル。

サテ (R^A, P) / 上ヲ考ヘルバ x_β / 平均値ハ0ナリ

$$(x_\beta, x_{\beta'}) = (x_\beta, x_{\beta'})_{P_B} = \rho(\beta, \beta')$$

(B ハ β, β' ヲ含ム任意ノ有限部分集合)。故ニ $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ ヲ (R^A, P) / 上ヲ考ヘルバ、求ムル G 型確率変数系ナリ。

§ 3. 應用 (stationary proceers / 構成)

定理7 (Kolmogoroff-Khintchine)

任意, positive definite function $p(t)$
 $(-\infty < t < \infty)$ を自己相関係数トシテモツ強義,
 stationary processガアル。

(証明) 前定理ヲ $A = R'$, $\mu(\alpha) = 0$, $p(\alpha, \beta) =$
 $p(\alpha - \beta)$ ト置イテ得ラレル $\{x_t; t \in R'\}$ ガ求ムル
 べし。 $\{x_t; t \in R'\}$ 及 $\{x_{t+\tau}; t \in R'\}$ ハ共
 = G 型ヲ

$$m(x_t) = m(x_{t+\tau}) (= 0)$$

$$(x_t, x_s) = (x_{t+\tau}, x_{s+\tau}) (= p(t-s))$$

故ニ定理5ニヨリ

$$\begin{aligned} P\{\omega; (x_t; t \in R') \in E\} \\ = P\{\omega; (x_{t+\tau}; t \in R') \in E\} \end{aligned}$$

コレハ $\{x_t\}$ ガ強義 stationaryナルコトヲ示ス。