



Title	或ル種ノニ階常微分方程式ノ週期解ニツイテ
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 261, p. 54-60
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75099
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1166. 或ル種ノ二階常微分方程式ノ
週期解ニツイテ

南 雲 道 夫 (阪大)

§ 1. 序

非線型二階常微分方程式

$$(0) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a(x) \frac{dx}{dt} + \phi(x) = f(t)$$

ニ於テ $a(x) > 0$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(x) > 0$ トシ, $f(t)$ ハ
 ω ヲ週期トスル任意ノ連続函数トスレバ, (0) ハ ω ヲ週期
トスル解ヲ持ツ。但シ $a(x)$, $\phi(x)$ = 閉スル細カイ附帯
條件ハ條ニ述ベル。

尚 $|f(t)|$ ノ大サヲ或ル制限以下ニ限レバ, (0) ハ只
一ツノ週期解ヲモテ, 他ノ解ハスベテ $t \rightarrow +\infty$ ノ時此

ノ週期解ニ収斂スル。又時ニ $\phi(x) = f(x)$ (f ハ正ノ
 常数) ナルトキヤ、或ハ $Q(x) = \lambda \phi'(x)$, $\phi'(x) \geq \phi'(0)$,
 $\lambda > 1$ ナルトキニハ、 $|f(t)|$ ノ大サニ制限ナク此ノ事ガ
 成立スル。

然レ一般ノ場合ニハ、コノ制限ガ果シテ必要ナル
 カドウカ未知ナリ。以上ノコトヲ証明スルノガ本論文
 ノ目的ナル。

§2. 週期解ノ存在

定理1. 開區間 $l_1 < x < l_2$ (但シ $l_1 < 0 < l_2$ ト
 ス)ニ於テ $Q(x)$ ハ連續, $\phi(x)$ ハ連續的積分可能ノ函数
 ナルノ諸條件ヲ満足スル。

$$(1) \quad Q(x) \geq Q_0 > 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(x) > 0$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow l_1} \phi(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow l_2} \phi(x) = +\infty$$

$$(3) \quad \int_0^x \phi(x) dx = \Phi(x) \text{ トオケトキ, } \lim_{x \rightarrow l_i} \Phi(x) = +\infty$$

($i = 1, 2$)

$$(4) \quad f(t) \text{ ハ } \omega \text{ ヲ週期トスル連續函数ナリ } |f(t)| \leq F.$$

以上ノ假定(1), (2), (3), (4)ガ成立スルトキ, (0)ハ ω
 ヲ週期トスル解 $x(t)$ ヲ少クトモ一ツモツ。又 F ヲ充分
 小サノ常数ニトレバ, 解 $|x(t)|$ ノ最大値 $\leq F$ ト共ニ任意
 ニ小サク出来ル。

証明

$$(5) \quad A(x) = \int_0^x Q(x) dx$$

トオキ, $y = x' + A(x)$ トスレバ二階, 微分方程式 (0)
ハ聯立微分方程式

$$(0,1) \quad \begin{cases} x' = y - A(x) \\ y' = -\phi(x) + f(t) \end{cases}$$

ト同等ニナル。此ノ右辺ノ函数ハ $x, y =$ ツキリふしツノ
條件ヲ満タシテ居ルカラ, $t=0$ ニ於ケルソノ初期値
ヲ x_0, y_0 トスルトキ, ソノ解 $x(t, x_0, y_0), y(t,$
 $x_0, y_0)$ ハ $(t, x_0, y_0) =$ ツイテ (ソノ存在範囲内ニアル
カヤリハ) 連続トナル。

扱テ

$$(6) \quad \{y^2 + (y - A(x))^2\} / 2 + 2\Phi(x) = P(x, y)$$

トオケバ, $P(x, y) \leq C$ ($C > 0$) ナル範囲ハ

$$A(x)/2 + \sqrt{C - [2\Phi(x) + A(x)^2/4]} \\ \geq y \geq A(x)/2 - \sqrt{C - [2\Phi(x) + A(x)^2/4]}$$

ト一致シ, 之ハ單一閉曲線 $P(x, y) = C =$ 囲マレタ開
領域アアル。

$P(x, y) = (0,1)$ ノ解ヲ代入スレバ C ヲ適當ト正ノ
常數トスルトキ,

$$(7) \quad P(x, y) \geq C \quad \text{アハ} \quad \frac{d}{dt} P(x, y) < 0$$

何トナレバ

$$(8) \quad \frac{d}{dt} P(x, y) = -a(x) \{y - A(x)\}^2$$

$$+ 2\{y - A(x)\} f(t) - A(x) \phi(x) + A(x) f(t)$$

所が

$$\lim_{x \rightarrow l_i} A(x) \phi(x) = +\infty \quad (i=1, 2) \text{ 及 } \forall (2) \text{ ヲリ}$$

$$(9) \quad \begin{cases} (x - l'_1)(x - l'_2) > 0 \text{ 十ル時,} \\ A(x) \phi(x) > 2F^2/a_0, \quad |\phi(x)| > 2F \end{cases}$$

ト十ル様十 l'_1, l'_2 がトレル。又 C ヲ充分大ニスレバ、

(4) ト (6) トカラ

$$(10) \quad \begin{cases} l'_1 \leq x \leq l'_2 \text{ 且ツ } P(x, y) \leq C \text{ 十ル時,} \\ |y - A| > 4F/a_0, \quad (y - A)^2 > 2|A|F/a_0. \end{cases}$$

ト十ル。従ッテ (7) 及ビ (4), (8), (9) カラ (7) が成立ス。

扱テ (7) = ヲリ, (x_0, y_0) ヲバ $P(x_0, y_0) \leq C$ 十ル範囲ニトレバ, $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ 十ル $(0,)$ 解ハ $t \geq 0$ = 於テ常ニ $P(x, y) \leq C$ 内ニ存在スル。カナル $(0,)$ 解ニツイテ $x(w) = x_1, y(w) = y_1$ トオケバ $(x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1)$ 十ル連続寫像ニヨリ, $P(x, y) \leq C$ 十ル範囲ハソレ自身ノ部分ニ移サレル。所がコノ範囲ハ同ト位相同型ナルカラ, 不動点ノ定理ニヨリ, ソノ範囲内ニハ一定度

$$(11) \quad (x_1, y_1) = (x_0, y_0)$$

ト十ル様十点が存在スル。方程式 $(0,)$ ハ t ヲ $t+w$ = 変ヘテモ不変ナルカラ, カナル初期値 (x_0, y_0) ヲモツ解ニツイテハ, $x(t+w) = x(t), y(t+w) = y(t)$ が成立スル。即チ $x(t)$ ハ $(0,)$ ノ週期解ナル。

尚 $C > 0$ を任意にとるとき, l'_1, l'_2 を充分大に
 近く選べば, $l'_1 \leq x \leq l'_2$, $P(x, y) \geq C$ となる,
 常に $|y - A| \geq \delta > 0$ なる δ が存在する。又 $x \neq 0$ であ
 り $A(x)\phi(x) > 0$, $|\phi(x)| > 0$ なる故に, F が適当に
 小さくとれば, (9) 及び (10) が成立する。故に F が小さ
 くなるにつれて C_F が増える。従って解 $|x(t)|$ は小さくなる。
 (証明了)

§3. 漸近性問題

次に (1) の周期解 $x_0(t)$ に対し, 他解 $x(t)$ は
 $t \rightarrow \infty$ の時,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$$

となる場合を考察する。

先づ (7) より, (2) の任意解 $x(t), y(t)$ は,
 t が充分大になれば, 必ず $P(x, y) < C$ なる範囲内に入
 り得る。故に $x(t), y(t)$ は $P(x, y) < C$ 内
 に入るものとする。

今 (x, y) 平面内, 任意の滑らかな曲線 L を考へ,
 L の長さを

$$(12) \quad \int \sqrt{\delta x^2 - 2b\delta x \delta y + c\delta y^2} = S[L]$$

と定義する。但し $\delta x, \delta y$ は曲線 L の微分係数である。
 $\delta x, \delta y$ の微分係数であり, b, c は (根号内が正定形, 条件)

$$(13) \quad C - b^2 > 0$$

＋ ν 如キ正、常數ヲアル。 $\mathcal{L}_0$ ヲ、 $t = t_0$ ニ於テ $P(x, y) < C$ 内ノ任意ノ滑ラカキ曲線トシ、ソノ各点ガ $(0,)$ ノ解ニ從ツテ移動シテ一般ノ t ニ對スルモノヲ單ニ $\mathcal{L}$ 示セバ、 $\delta x, \delta y$ ノ変化ハ微分方程式

$$(14) \quad \begin{cases} \delta'_x = \delta_y - a(x) \delta_x \\ \delta'_y = -\phi'(x) \delta_x \end{cases}$$

ニ從テヨリ

$$(15) \quad \frac{d}{dt} S[\mathcal{L}] = - \int \frac{G(x) \delta_x^2 + H(x) \delta_x \delta_y + b \delta_y^2}{\sqrt{\delta_x^2 - 2b \delta_x \delta_y + C \delta_y^2}}$$

トナル。但シ $G(x), H(x)$ ハ

$$(16) \quad \begin{cases} G(x) = a(x) - b \phi'(x) \\ H(x) = 1 - b a(x) + C \phi'(x) \end{cases}$$

ナリ。故ニ $P(x, y) \leq C$ 内ニ於テ $\delta x, \delta y$ ノ二次形式

$$G(x) \delta x^2 + H(x) \delta_x \delta_y + b \delta y^2$$

ガ正ノ定形、即チ

$$(17) \quad 4b[a(x) - b \phi'(x)] > [1 + b a(x) - C \phi'(x)]^2$$

＋ ν 如キ正、常數 a, b ガ存在スルトキハ、 $\varepsilon > 0$ ヲ充分小サクトレバ

$$(18) \quad \frac{d}{dt} S[\mathcal{L}] \leq -\varepsilon S[\mathcal{L}]$$

從ツテ

$$(19) \quad S[\mathcal{L}] \leq S[\mathcal{L}_0] e^{-\varepsilon(t-t_0)}$$

故 =

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S[L] = 0$$

之レカラ $P(x, y) \leq C$ 内ニアル $(0,)$ / 任意ノ二組ノ解 $x_\nu(t), y_\nu(t)$ ($\nu=1, 2$) ニツキ

$$(20) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \{x_1(t) - x_2(t)\} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \{y_1(t) - y_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

ガ得ラルル。

一般ノ場合ニハ

$$(21) \quad b = \frac{a(0)}{2\phi'(0)}, \quad C = \frac{\phi'(0) + \{a(0)\}^2}{2\{\phi'(0)\}^2}$$

トオケバ, $x=0$ ニ於テ (17)ガ成立スル。従ツテ $\delta > 0$ ヲ適當ニ小サクトレバ, $|x| < \delta$ ニ於テ (17) 及ビ (13)ガ成立スル。所ガ F ヲ適當ニ小サクスレバ 従ツテ C ヲ小サクスレバ $P(x, y) \leq C$ ナル範圍ハ $|x| < \delta$ 内ニ納マル。故ニ F ガ適當ニ小サラバ (20)ガ成立スル。

之カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. $a(x), \phi(x), f(t)$ ガ定理1ノ假定(1), (2), (3), (4)ニ従フトキ, F ガ適當ニ小サナ正ノ常數ナラバ方程式(0)ハ ω ヲ週期トスル解 $x = x_0(t)$ ヲ丁度一ツモテ, (0)ノ任意ノ解 $x(t)$ ニツイテ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$$