



Title	群論ニ於ケル一例
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 262, p. 62-66
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75100
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1167. 群論ニ於ケル一例

中山 正(名大)

「各元、order が或ル m を越へない直既約な有限群、order は (m がキマル 上限で) 有限であらう」トイフ
角谷サンの問題、勿論ソレハホソノ食後ノ話題トシテ提出サ
レタノデスガ、ヲ面白ク思ヒマシテ考ヘテ見マシタノデ、オ
恭飲話トシテ御報告シマス。反例:

$a_1, a_2, \dots, a_N$ ナル N 個ノ元ヲ生成サレ、次ノ様ナ
関係ヲ定義サレタ群 G を考ヘル。

$$a_1^9 = a_2^9 = \dots = a_N^9 = 1$$

$$a_{n+1} a_n = a_n^4 a_{n+1}, \quad a_{n+k} a_n = a_n a_{n+k} \quad (k \geq 2)$$

然ラバ、コノ G ノ元ハスベテ

$$(*) \quad a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_N^{e_N} \quad (0 \leq e_n \leq 8)$$

ナル形ニ、而モ一意的ニ表ハサレル (G ノ order $= 9^N$)

コレハ例ヘバ、 $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \dots$ トイフ風ニ次々ニ
擴張シテ行ケバワカル。ソノ際効イテ来ルコトハ

$$4^3 \equiv 1 \quad \text{從ツテ勿論} \quad 4^9 \equiv 1 \pmod{9}$$

ナルコト、及ビ

$$4^4 \equiv 4 \pmod{9}, \quad \text{從ツテ} \quad a_{n+1} a_n = a_n^4 a_{n+1}$$

ナル関係が a_{n+2} ニヨル交換ヲ保タル事デアル。

扱テ、コノ G 、各元ノ *order* ハ 9 ヲ有ル、何故ナラ
上記ノ元ノ 9 乗ハ

$$a_1^{e_1(1+4^{e_2}+(4^{e_2})^2+\dots+(4^{e_2})^{e_3})} a_2^{e_2(1+4^{e_3}+\dots+(4^{e_3})^{e_4})} \dots a_N^{9e_N}$$

デアリ、コノ

$$1 + 4^{e_n} + \dots + (4^{e_n})^8 \equiv 0 \pmod{9}$$

デアル。ソレハ $(1+4+7) + (1+4+7) + (1+4+7) \equiv 0$
 $\pmod{9}$ 等カラ確メラレル。

G ノ元 $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_N^{e_N}$ デスベテ、 e_n ガ $\equiv 0 (3)$
ナル元ハ G 、核心ニ属シ、而モ G 、核心ハカクル元ノミヨ
リナレコトハ直チニ知ラレル。核心ヲ Z デ表ハス。 G/Z
ハスデニ可換群ナルコトハ定義ノ関係式ヲ見レバ明カデア
ル。事實 $(3, 3, \dots, 3)$ ノ可換群デア
ル。

扱テ G ガ直既約デア
ルコトヲ証明シヨウ。ソノタメ假ニ
 G ガ直既約デナイトシ、 $G = H \times K$ トシ、 H ノ元ヲ一般ニ

$$(*) \quad x = a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_N^{e_N}$$

デアハシ、 K ノ元ヲ一般ニ

$$(**) \quad y = a_1^{f_1} a_2^{f_2} \dots a_N^{f_N}$$

デアハサウ。

今假 = $H \subseteq Z$ トスル。然ラバ G/Z 、各類ハ K 、元ヲ
 代表サレルカラ、 $\forall n = \text{對シテ}$ $e, f_n \not\equiv 0(3), f_n \equiv 0(3)$
 ($n = 1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, N$) + ル元 y ガアル。コ
 ノ $y = \text{對シテ}$

$$y^3 \equiv a_n^{3f_n} \quad (f_n \not\equiv 0(3))$$

+ ルコトハ上記9条ノ計算ト同様ニシテ知ラレル。ヨツテ
 $a_n^3 \in K$ 、 n ハ任意ダカラ $Z \subseteq K$ 、ヨツテ $H \subseteq K$ ナ、コレハ
 矛盾、ヨツテ $H \not\subseteq Z$ 、同様ニ $K \not\subseteq Z$ デアル。

サテ、

$$xy = a_1^{e_1+4^{e_2}f_1} a_2^{e_2+4^{e_3}f_2} \dots a_{N-1}^{e_{N-1}+4^{e_N}f_{N-1}} a_N^{e_N+f_N}$$

デアリ、 $y \in H$ e_n ト f_n ヲ取換ヘテ得ラレル。然ルニ
 $xy = yx$ デアルカラ、 $n = 2, 3, \dots, N = \text{對シテ}$

$$e_{n-1} + 4^{e_n} f_{n-1} \equiv f_{n-1} + 4^{f_n} e_{n-1} \pmod{9}$$

即チ $f_{n-1}(4^{e_n} - 1) \equiv e_{n-1}(4^{f_n} - 1) \pmod{9}$ デアル。

然ルニ $4^r - 1$ ハ3ニ割レ $(4^r - 1)/3 \equiv r \pmod{3}$ デ
 アル。ヨツテ

$$f_{n-1} e_n \equiv e_{n-1} f_n \pmod{3}$$

+ ル関係ヲアル。コレガ任意ノ $x \in H, y \in K, n = 2, \dots, N = \text{對シテ}$ 成立ツ。

ソコデ次ニスベテノ $x = \text{ツキ}$ $e_n \equiv 0(3)$ + ル如キ n
 ハ存在シタイコトヲ証明スル。假ニ若シソノ様ナ n ガアレバ

$G = H \times K$ だから $f_n \not\equiv 0(3)$ となる y があつた。こゝより任意の $x \in H$ を考へる。

$f, e_{n-1} \equiv e_n f_{n-1} \pmod{3}$, $f_n \not\equiv e_n \equiv 0(3)$ ならば $e_{n-1} \equiv 0(3)$. 従つて K の或る (前より選んだ) y が $f_{n-1} \not\equiv 0(3)$ となる y があり, 従つて任意の $x \in H$ に対して $e_{n-2} \equiv 0(3)$, ----- とより結局 H の任意の x に対して $e_n \equiv e_{n-1} \equiv \dots \equiv e_1 \equiv 0(3)$ となる。同様 $e_n \equiv e_{n+1} \equiv \dots \equiv e_N \equiv 0(3)$ となる。よつて $H \subset Z$ となりいけよう。

同様 = 總て y につき $f_n \equiv 0(3)$ となる n も存在しない。

次に或る n に対して $e_{n-1} \not\equiv e_n \equiv 0(3)$ となる元 $x \in H$ があつたとする。然らば $e'_n \not\equiv 0(3)$ となる H の元

$$x' = a_1^{e'_1} a_2^{e'_2} \dots a_N^{e'_N}$$

があつた。今 xx' 及び x^2x' を同様 + normal form = 書いた時、指標を e_n^*, e_n^{**} で表せば、

$$e_{n-1}^* \equiv e_{n-1} + e'_{n-1} \not\equiv 2e_{n-1} + e'_{n-1} \equiv e_{n-1}^* \pmod{3},$$

$$e_n^* \equiv e_n^{**} \equiv e'_n \not\equiv 0(3)$$

であつた。但し K の元 y が $f_n \not\equiv 0(3)$ となる y にとれば、 y は xx' と x^2x' とで可換だから

$$e_{n-1}^* f_n \equiv e_n^* f_{n-1} \equiv e_n^{**} f_{n-1} \equiv e_{n-1}^{**} f_n \pmod{3}$$

コレハ矛盾デアル。同様ニ $e_n \neq e_{n-1} \equiv 0(3)$ ナル x 存在
シナイ。

カクテ H ノ元 $x = y$ 或ル $e_n \neq 0(3)$ ナルスペテノ
 $e_n \neq 0(3)$ デアル。 K ノ元 $y = x$ 同様に同様デアル。ソコ
デ $(*)$, $(**)$ ノノ様ナスペテノ e_n, f_n ガ $\neq 0(3)$ ナル
 H, K ノ元トスレバ

$$\frac{e_1}{f_1} \equiv \frac{e_2}{f_2} \equiv \dots \equiv \frac{e_N}{f_N} \pmod{3}.$$

即チ $y \equiv x \pmod{Z}$ デアル、或ル巾デアル。

ヨツテ $K \subseteq \{x\}Z$

同様ニ $H \subseteq \{y\}Z$

故ニ $G = H \times K = \{y\}Z \times K = ZK = \{x\}Z$

シカレ G/Z ハ *cyclic* デナイカラ矛盾。

コレデ G ガ直既約ナコトガワカッタ。

カクテ G ハ直既約、ソノ各元ノ *order* ハ高々 q 、而テ
 G ノ *order* ハ q^N デ、 N ナ大キクスレバ幾ラデモ大キクナ
ル。