



Title	射影媒介変数ニツイテ （談話1159ニ對スル注意）
Author(s)	矢野, 健太郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 262, p. 69-90
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75102
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1169. 射影媒介変数 = ツイテ

(談話 1159 = 對スル 注意)

矢野 健太郎 (東大)

射影媒介変数 = 開スル商野一夫君ノ談話 1159 = 對スル
感想ヲノベテ御參考ニ供シマス。

§1. 拡張サレタ射影幾何學ノ、+カヘ始メテ射影媒介変
数ヲモチコングノハ、小生ノ知ル限リニ於テハ J. H. C.

Whitehead (The representation of projective

spaces. *Annals of Math.* vol. 32, 1931.

327 — 360) でありマス。 $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda} (\lambda, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, \dots, n)$ の条件

$$(1.1) \quad (a) \quad \Pi_{0\nu}^{\lambda} = \Pi_{\nu 0}^{\lambda} = \delta_{\nu}^{\lambda}, \quad (b) \quad \frac{\partial \Pi_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^0} = 0$$

を満足する対称射影接続、経数トスレバ、Veblen、意味、拡張サレタ射影幾何學ハ

$$(1.2) \quad \begin{cases} \bar{x}^0 = x^0 + \log p(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \bar{x}^i = x^i (x^1, x^2, \dots, x^n) \end{cases}$$

ナレ形ノ変換下ノ $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ ノ不変式論デアリマス。条件(1.1)ガ変換(1.2)デ不変デアルコトハ勿論デアリマス。

サテ今 $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ フォーツノ $n+1$ 次元ノ対称擬似接続空間 A_{n+1} = 於ケル接続ノ経数トシ、モシ $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ ガ丁度(1.1)ナル条件ヲ満足スルヤシナ特別ノ座標系が存在スルナラバ、カナル座標系ニ於ケル A_{n+1} フ用ヒテ Veblen ノ射影空間 P_n フ表現シ得ルワケデアリマス。シカモノノヤウナ座標系ハ(1.2)ナレ形ノ変換ガ互ニ結バレテキレコトガ証明サレテ居リマス。

又 P_n ノ表現トシテ A_{n+1} フトリ、 A_{n+1} = 於ケル道ノ方程式ヲ書き下セバ

$$(1.3) \quad \frac{d^2 x^{\lambda}}{dt^2} + \Pi_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt} = 0$$

デアリマス。但シここニ t ハ、 A_{n+1} ノ道ニ對スル擬似時間

変数であります。シカシナカラコゝ場合, (1.3) ハ實ハ P_n
 ニ於ケル道ノ表現ニナツテ居リ, シカモ t ハ P_n ニ於ケル道
 ニ對シテハ一ツノ射影的ノ媒介変數ニナツテキルコトヲ示シ
 テ, J. H. C. Whitehead ハコレヲ射影媒介變數ト呼ンデオ
 ルノデアリマス。Whitehead ノ方法ハ所謂射影標準座標
 ヲ用ヒル方法デアリマスガ、コゝデハモット直接ノ方法デコ
 レヲ示シテミマス。

先ツ (1.3) ニ於テ, $\lambda = 0, \lambda = i$ ($i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$) トオイテ之レヲ分ケテ書キマスト, (1.1) ナ
 ル條件ヲ用ヒテ

$$(1.4) \quad \frac{d^2 x^0}{dt^2} + \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2 + \Pi_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

ミマス

$$(1.5) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^i}{dt} + \Pi_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

ヲ得マス。コゝデ (1.5) ノ形ヲ整ヘルタメニ

$$(1.6) \quad 2 \frac{dx^0}{dt} = \frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds} \right)^2}$$

ニ依ツテ定義サレル新シイ媒介變數 s ヲ導入スレバ, (1.4)

$$(1.7) \quad \{t, s\} = \frac{\frac{d^3 t}{ds^3}}{\frac{dt}{ds}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}} \right)^2 = -2 \Pi_{jk}^0 \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

(1.5) は

$$(1.8) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Pi_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

となります。(1.7) カラエハーツ / Schwarz / 微分方程式
サレルノデスカラ射影的十媒介変数デアルコトが判り、(1.8)
カラコレハ P_n / 道ヲ表現シテキルコトが判ります。ナホ(1.6)
ハ積分サレテ

$$(1.9) \quad x^0 = \frac{c}{2} \log \frac{dt}{ds}$$

ヲ與ヘルコトヲコソニ注意シテオキマセウ。

猶 A_{n+1} = 於ケル曲率テンソルヲ

$$(1.10) \quad \Omega_{\mu\nu\omega}^{\lambda} = \frac{\partial \Pi_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\omega}} - \frac{\partial \Pi_{\mu\omega}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Pi_{\mu\nu}^{\alpha} \Pi_{\alpha\omega}^{\lambda} - \Pi_{\mu\omega}^{\alpha} \Pi_{\alpha\nu}^{\lambda}$$

トスレバ、(1.1)ノ條件ニ依ツテ

$$\Omega_{\cdot 0 \nu \omega}^{\lambda} = \Omega_{\cdot \mu 0 \omega}^{\lambda} = \Omega_{\cdot \mu \nu 0}^{\lambda} = 0$$

デアリマスカラ

$$(1.11) \quad \Omega_{jkh}^i = \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial x^h} - \frac{\partial \Pi_{jh}^i}{\partial x^k} + \Pi_{jk}^a \Pi_{ah}^i - \Pi_{jh}^a \Pi_{ak}^i \\ + \Pi_{jk}^0 \delta_h^i - \Pi_{jh}^0 \delta_k^i$$

即チ

$$(1.12) \quad \Pi_{jkh}^i = \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial x^h} - \frac{\partial \Pi_{jh}^i}{\partial x^k} + \Pi_{jk}^a \Pi_{ah}^i - \Pi_{jh}^a \Pi_{ak}^i$$

トオケバ

$$(1.13) \quad \Omega^i_{jkl} = \Pi^i_{jkl} + \Pi^0_{jkl} \delta^i_k - \Pi^0_{jkl} \delta^i_l$$

が一つの射影的テンソルであることが判ります。これは射影的テンソルといふハ

$$\bar{x}^0 = x^0 + \log p(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

とル x^0 のみの変換 = 依つて Π^0_{jkl} 及び Π^i_{jkl} は次の

$$(1.14) \quad \bar{\Pi}^0_{jkl} = \Pi^0_{jkl} - \frac{\partial^2 \log p}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \log p}{\partial x^i} \Pi^i_{jkl} \\ - \frac{\partial \log p}{\partial x^j} \frac{\partial \log p}{\partial x^k}$$

$$(1.15) \quad \bar{\Pi}^i_{jkl} = \Pi^i_{jkl} - \frac{\partial \log p}{\partial x^j} \delta^i_k - \frac{\partial \log p}{\partial x^k} \delta^i_j$$

に変換してあります。が、 Ω^i_{jkl} はこの変換 = 對して不変であり、これが普通座標変換 = 對してハテンソル成分 = ナツてキルト云フ意味であります。 Ω^i_{jkl} は射影的テンソルといふことができます。

$$(1.16) \quad \Omega^i_{jkl} = 0$$

も亦射影的の条件であります。これは依つて (1.13) から Π^0_{jkl} を定めます。

$$(1.17) \quad \Pi^0_{jkl} = -\frac{1}{n-1} \Pi_{jkl} \quad (\Pi_{jkl} = \Pi^i_{jkl} \delta_i)$$

を得ます。かり Π^i_{jkl} 及びこれから定められた Π^0_{jkl} を用いて組立てた射影接続が所謂標準射影接続であります。すなわち Π^0_{jkl} が (1.17) の如き簡単な形が定まるハ、實ハ $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$

トイフ條件が非常ニ強クキイテ居ルノデアリマシテ。一般ノ場合ニハ (1.17) ハモット複雑ナル形ヲトルモノデアリマス。

サテ (1.17) ヲ (1.9) ニ代入シマスト

$$(1.18) \quad \{t, s\} = \frac{2}{n-1} \Pi_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

ヲ得マス。カク定メラレタ t ヲ吾々ハ標準射影媒介変數ト呼ブコトニシマス。(Berwaldノpreferred projective parameterヤス)

以上ノ議論カラ判リマスヤウニ, Whitehead自身ハソコマデ、ベテキルワケデハアリマセンガ、彼ノ議論ハ既ニ後述ノ L. Berwald, J. Haantjes 及び筆者ノ議論ノ萌芽ヲ含ンデキルノデアリマス。

§2. サテ L. Berwald ハ (On the projective geometry of paths, Annals of Math., vol. 37, 1936, 879—898), 道ノ射影幾何學ヲ取扱フ他、新シイ方法ヲ提議シテキマス。シカシ良ク考ヘテミマスト彼ノ方法ハ、實ハ §1ニ於テ示シタ方法ヲ逆ニタドルコトニアルノ

デス。即チ道ガ

$$(2.1) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Pi_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

ニ與ヘラレタ場合

$$(2.2) \quad \Pi_{jk}^i = \Pi_{jk}^i - \varphi_j \delta_k^i - \varphi_k \delta_j^i$$

ナル Π_{jk}^i ノ所謂射影変換ニ依ツテ, (2.1) ナル道ノ微分方程式ハソノ形ヲ變ヘタイコトハ同知ノ事實デアリマセン、今

(2.1) ナル道ノ上デ、一ツノ媒介変数 t ヲ

$$(2.3) \quad \{t, s\} = -2 \Pi_{jk}^0 \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

デ定義シマス。コノ Π_{jk}^0 及ビ Π_{jk}^i ハ何レモ二次形式ノ係数デスカラ、 $\Pi_{jk}^0 = \Pi_{kj}^0$ 、 $\Pi_{jk}^i = \Pi_{kj}^i$ ト假定シテモ一般性ヲ失ヒマセソ。

サテ t ハ一ツノ Schwarz ノ微分デ定義サレルノデスカラ。一次分數変換ヲ除イテ定ル射影的ナ媒介変数デアアルコトハ明デアリマスガ、 $t = \text{對シテ変}$ ニ次ノニツノ條件ヲオキマス。即チ

(i) t ハ座標ノ変換ニ對シテ不変デアアル。

(ii) t ハ Π_{jk}^i ノ射影変換 (2.2) ニ對シテ不変デアアル。

ノニツデス。

(i) カラハ Π_{jk}^0 ガ座標変換ニ對シテ對稱ナ二次ノ共変テンソルノ成分デアアルコトガ判リマス。(ii) カラハ、 Π_{jk}^i (2.2) ニ對スル変換法則トシテ

$$(2.4) \quad \bar{\Pi}_{jk}^0 = \Pi_{jk}^0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j} \right) + \varphi_i \Pi_{jk}^i - \varphi_j \varphi_k$$

ガ得ラレマス。Berwald ハカコル変換法則ヲモツ Π_{jk}^0 及ビ Π_{jk}^i ノ不変式論ヲ拡張サレタ射影幾何學ト定義シテキルノデアリマスガ、コレハ一般ニ δ ノベクトルト一致イタシマセソ。一致スルタメノ條件ハ、 φ_j ガ一ツノ勾配ベクトルニナルコトデアリマス。コノ意味デ Veblen ノ射影

幾何學ヨリハ Berwald / 射影幾何學ノ方が幾分廣イノ
 デアリマスガ、筆者ノ意見ニ依レバ何レモ $\Pi_{jk}^0 = \Pi_{kj}^0$ ナ
 ル條件ヲトリ去ラヌ限リ、更ニ一般ノ射影幾何學ニハ列達出
 来サシモアリマセン。實ハ Π_{jk}^0 ノ変換式トシテハ

$$(2.5) \quad \bar{\Pi}_{jk}^0 = \Pi_{jk}^0 - \frac{\partial g_j}{\partial x_k} + g_i \Pi_{jk}^i - g_j g_k$$

ヲ得ルコトが望マシイノデアリマスガ、コノマコノ形ヲ $\bar{\Pi}^0$
 及ビ Π_{jk}^0 が對稱ナルコトヲ要求スレバ、上式及ビ
 $\Pi_{jk}^i = \Pi_{kj}^i$ カラ g_j ハ勾配ベクトルトナツテ *Veblen*
 ノ場合ニナツテシマヒ、 $\bar{\Pi}_{jk}^0$ 及ビ Π_{jk}^0 ハ對稱デアルガ、
 g_j ハ勾配ベクトルデナイトイフノデアアル (2.5) デ
 ハナク (2.4) ナル形ノ変換式ヲ用ヒルヨリ外ナク、Berwald
 ノ場合ニナツテシマフノデス。コノ点ハ更ニ後ニ詳論スルコ
 トニシマス。

サテ Berwald ノ流儀ニ依ツテ Π_{jk}^0 及ビ Π_{jk}^i ノ不
 変式、例ヘバ Weyl ノ曲率テンソルヲ導クニハ次ノ如クニ
 シマス。 Π_{jk}^i ノ射影変換 (2.2) ニ對スル曲率テンソル Π_{jkl}^i
 ノ変換式ハ良ク知ラレテキルヌウニ

$$(2.6) \quad \bar{\Pi}_{jkl}^i = \Pi_{jkl}^i + g_{jk} \delta_{l,i}^i - g_{jl} \delta_{k,i}^i - \delta_{jk}^i (g_{li} - g_{li})$$

但シ

$$g_{jk} = \frac{\partial g_j}{\partial x_k} - g_i \Pi_{jk}^i + g_j g_k$$

デアリマス。(2.6) デ $i = k$ トオイテ縮約スレバ

$$\bar{\pi}_{jk} = \pi_{jk} + n \varphi_{jk} - \varphi_{kj} \quad (\bar{\pi}_{jk} = \bar{\pi}_{jki}, \pi_{jk} = \pi_{jki})$$

ヲ得マス。又 (2.4) ヲ

$$2 \bar{\pi}_{jk}^0 = 2 \pi_{jk}^0 + \varphi_{jk} + \varphi_{kj}$$

マス。コレヲ = 式 (2.6) ヲ加へ合ハテコレヲ φ_{jk} テトケバ

$$(2.7) \quad \varphi_{jk} = \frac{1}{n+1} (2 \bar{\pi}_{jk}^0 + \bar{\pi}_{jk}) - \frac{1}{n+1} (2 \pi_{jk}^0 + \pi_{jk})$$

ヲ得マス。(2.7) ヲ式 (2.6) 代入スレバ、吾々ハ

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Omega_{jkh}^i &= \pi_{jkh}^i - \frac{1}{n+1} (2 \pi_{jk}^0 + \pi_{jk}) \delta_h^i \\ &\quad + \frac{1}{n+1} (2 \pi_{jh}^0 + \pi_{jh}) \delta_k^i + \frac{1}{n+1} \delta_j^i (\pi_{kh} - \pi_{hk}) \end{aligned}$$

ハ射影的、即チ (2.2) デ示変ナテンソルデアルコトヲ見出しマス。従ッテ $\Omega_{jkh}^i = 0$ 〇射影的ナ條件デスモテ、コレニ依ッテ π_{jk}^0 ヲ定メマス

$$(2.9) \quad \pi_{jk}^0 = - \frac{1}{2(n-1)} (\pi_{jk} + \pi_{kj})$$

ヲ得マス。コレヲ (2.3) 代入スレバ

$$(2.10) \quad \{t, s\} = \frac{2}{n-1} \pi_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

(2.8) 代入スレバ

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Omega_{jkh}^i &= \pi_{jkh}^i - \frac{1}{n^2-1} (n \pi_{jk} + \pi_{kj}) \delta_h^i \\ &\quad + \frac{1}{n^2-1} (n \pi_{jh} + \pi_{hj}) \delta_k^i + \frac{1}{n+1} \delta_j^i (\pi_{kh} - \pi_{hk}) \end{aligned}$$

ヲ得マス。(2.10)ハ(1.18)ト同ジ形デアリマスが、(1.18)ニ於ケル Π_{jk} ハ對稱、(2.10)ニ於ケル Π_{jk} ハ一般ニ對稱デナイコトハ注意ヲ要シマス。モットモ(2.10)ニ於テモ Γ ノ定義ニハ Π_{jk} ノ對稱部分シカ影響シナイワケデハアリマス。

(2.11)ハ Weylノ射影曲率テンソルヲ與ヘテキルノデアリマスが、コレハ(1.17)ヲ(1.13)ニ代入シテ得ラレル

$$(2.12) \quad \Omega^i_{\cdot j k h} = \Pi^i_{\cdot j k h} - \frac{1}{n-1} \Pi_{jk} \delta^i_h + \frac{1}{n-1} \Pi_{jh} \delta^i_k$$

ト一致イタシマセン。シカシ Π_{jk} ガモレ對稱デアルトスレバ、(2.11)ハ(2.12)ト一致シマス。

從ツテ Veblenノ射影幾何學ハ Π_{jk} ガ對稱トイフコトヲ極度ニ利用シテキルコトが判リマス。例ヘバ射影変換

$$\bar{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \varphi_j \delta^i_k - \varphi_k \delta^i_j$$

ニ於テ φ_j ヲ勾配ベクトルニ限ルノモ、實ハ Π_{jk} ノ對稱性ヲ保ツ爲メマス。

Π_{jk} ガ對稱デアレバ、有名ニ恒等式

$$\Pi^i_{j k h} + \Pi^i_{k h j} + \Pi^i_{h j k} = 0$$

カラ判リマス又ウニ $\Pi^i_{i k h} = 0$ 、從ツテ

$$\frac{\partial \Pi^i_{ik}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Pi^i_{ih}}{\partial x^k} = 0$$

從ツテ

$$(2.13) \quad \pi_{ik}^i = \frac{\partial \Pi}{\partial x_k}$$

ナル如キ Π が存在シマス。同様ニ $\bar{\pi}_{jk}^i$ 也對稱デアルトシマス

$$(2.14) \quad \bar{\pi}_{ik}^i = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_k}$$

ナル如キ $\bar{\Pi}$ が存在シマス。従ツテ

$$\bar{\pi}_{jk}^i = \pi_{jk}^i - g_j \delta_k^i - g_k \delta_j^i$$

ニ於テ $i = j$ トオイテ縮約ヲ行ヘバ

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_k} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} - (n+1) g_k$$

従ツテ g_k ハ勾配ベクトルヲトケレバナラズ、コレヲ

$$g_k = \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

トオキマス

$$\bar{\Pi} = \Pi - (n+1)g + \text{const.}$$

ヲ得マス。カク Veblen / 理論ニ於テ、 $\pi_{jk}^i = \pi_{kj}^i$ ナル條件ヲ更ニ活躍サセ、例ヘバ上ノ Π / 如キが本質的ニ割合ヲ決メルヲ、深い研究が望コレル次第デアリマス。

§ 3. 以上 Veblen 及ビ Berwald / 理論ハ非常ニ巧妙デアリマスが、又技巧的デアルトモ言ヘマス。ソコデコ

レノ理論が, Cartan / 射影接続空間 / 見地カラ見直
 バ, カナリ自然ニ導キ出スコトが出来るトイフコトヲ注意シ
 ヲウトイフ / が, 筆者 / (*Les espaces à connexion
 projective et la géométrie projective des
 paths, Thèse, Paris, 1938*) 續リデマシタ。
 即チ Cartan / 射影接続ヲ, 所謂準自然標構ヲ曰ヘテ

$$(3.1) \quad dA_0 = dx^0 A_0 + dx^i A_i,$$

$$dA_i = \omega_{jk}^0 dx^k A_0 + \omega_{jk}^i dx^k A_j$$

ヲ表ハシ

$$(3.2) \quad dx^0 = p_i dx^i, \quad \omega_{jk}^0 = \pi_{jk}^0,$$

$$\omega_{jk}^i - \delta_j^i p_k = \pi_{jk}^i$$

トオイテ 旋率ガナイトイフ条件ヲ加ヘマス

$$(3.3) \quad \pi_{jk}^i = \pi_{kj}^i$$

ガ得ラレマス。旋率ガナイトイフ条件カラ $\pi_{jk}^0 = \pi_{kj}^0$ /
 出ナイコトハ注意ヲ要シマス。

次ニ無限遠平面ノ変換ニ相當スル

$$(3.4) \quad \bar{A}_0 = A_0, \quad \bar{A}_i = A_i - g_i A_0$$

ヲ施シテ, コレニ對スル $p_i, \pi_{jk}^0, \pi_{jk}^i$ / 変換式ヲ求メマ
 ス

$$(3.5) \quad \bar{p}_i = p_i - g_i,$$

$$(3.6) \quad \bar{\pi}_{jk}^0 = \pi_{jk}^0 - \frac{\partial g_i}{\partial x^k} + g_i \pi_{jk}^i - g_j g_k$$

$$(3.7) \quad \bar{\pi}_{jk}^i = \pi_{jk}^i - \varphi_j \delta_k^i - \varphi_k \delta_j^i$$

が得られます。ここは任意ノ共変ベクトルデアリマシテ、 δ^1 及び δ^2 二於テノベタ π_{jk}^0 及び π_{jk}^i ノ変換ヲ何レモ特別ノ場合トシテ含ンデ居リマス。更ニコレヲノ変換ハ無限遠平面ノ変換トイフ明瞭ノ意味ヲモテ得ルヌヲニツタリケテアリマス。

更ニ *Cartan* ノ方法ニ從ツテ曲率テンソルヲ求メマス

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \Omega_{jkh}^i &= \pi_{jkh}^i + \pi_{jk}^0 \delta_h^i - \pi_{jh}^0 \delta_k^i \\ &\quad - \delta_j^i (\pi_{kh}^0 - \pi_{hk}^0) \end{aligned}$$

トナリマスガ、コノテンソルガ射影的ノテンソルデアル、即チ無限遠平面ノ変換 (3.4) ニ對シテ不変デアルトイフコトハ、一見明ナデアリマス。何故ナレ、コレハ *Cartan* ノ曲率テンソルノ作り方カラモ當然ノコトデアリマスガ、(3.7) ノ変換ニ對シテ π_{jkh}^i ハ (2.6) ノ変換ヲ受ケマス。然レニ (3.8) ニ於ケル π_{jk}^0 ハ (3.6) ノ変換ヲ受ケルノデス。從ツテ (3.8) ニ於テ φ_{jk} ノ量ハ何レモ消シ合ツテシマツテ、(3.8) ハ相変ラズ不変ノデアリマス。前々ノ様ニ $\Omega_{jki}^i = 0$ ノ射影的ノ條件ヲオイテ π_{jk}^0 ヲ決定シヨクトシマス

$$0 = \pi_{jkh}^0 + n \pi_{jk}^0 - \pi_{kh}^0$$

トリマスノデ, $\Pi_{jk}^0 \neq \Pi_{kj}^0$ ノトキハ一寸面倒デス。シ
カシ上式ハ幸 Π_{jk}^0 デトクコトガ出来タ

$$(3.9) \quad \Pi_{jk}^0 = -\frac{1}{n^2-1} (n \Pi_{jk} + \Pi_{kj})$$

ガ得ラレマス。コレヲ (3.8) = 代入スレバ *Weyl* : 射影曲
率テンソルノ得ラレルコトハ前ト同様デアリマス。

サテ道ハ, ソノ展開ガ直線ニナルモノナ曲線デアルト定
義シマス, , , 微分方程式ハ

$$(3.10) \quad d^2 A_0 = \alpha dA_0 + \beta A_0$$

ナレ形デイルコトハ明デアリマス。従ツテ適當ナ因數 ρ ト適
當ナ媒介変數 t フトツテ, (3.10) ハ

$$(3.11) \quad \frac{d^2 \rho A_0}{dt^2} = 0$$

ト書キ直セル筈デアリマス。コレニ現ハレル媒介変數 t ハ,
實ハ計算ヲ行フ前ニ既ニ射影的ナ媒介変數デアルコトハ明
ナデアリマス。梅故ナラ (3.11) ヲ満足スル曲線ヲ一点 P デ
展開シマス

$$\rho A_0 = (\rho A_0)_P + t \cdot \left(\frac{d\rho A_0}{dt} \right)_P$$

ナレ形ヲトル筈デスカラ, t ハコノ直線上ノ四点ノ非調和比
ヲ與ヘルモノデアリマス。従ツテ明ニ射影的ナ媒介変數デ
イルカラデアリマス。シカシコレヲ計算ニ依ツテ確カナルコ
トニ出来マス。 (3.11) ヲ (3.1) ヲ用ヒテ計算シマス

$$(3.12) \quad \rho \frac{d^2 x^0}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \frac{d^2 \rho}{dt^2} + \rho \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2 \\ + \rho \Pi_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

$$(3.13) \quad \rho \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \rho \Pi_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + 2 \rho \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^i}{dt} \\ + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{dx^i}{dt} = 0$$

＋ルニ式ヲ得マス。コノテ (3.13) ノ形ヲ整ヘルヲトス

$$(3.14) \quad 2 \frac{dx^0}{dt} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds} \right)^2}$$

トオキマス、(3.12) ハ

$$(3.15) \quad \{t, s\} = -2 \Pi_{jk}^0 \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

(3.13) ハ

$$(3.16) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Pi_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

トナツテ、 t ハ射影的＋媒介変数デアールコトが判リマス。特
ニ (3.9) ヲ (3.15) ニ代入シマス、 Π_{jk}^0 ノ幾何部分知リカ
問題トナルノデスカラ

$$(3.17) \quad \{t, s\} = \frac{2}{n-1} \Pi_{jk}^0 \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

ヲ得マス。高野君ノ言ハレルヤニ

$$\pi_{jk}^0 = -\frac{1}{n-1} \pi_{jk}$$

ヲ (3.15) = λ レルノデハナク, (3.9) ヲ (3.15) = λ レテ (3.17) ヲ得ラレルノデアルコトハ注意ヲ要マス。

§ 4. 一方 J. Haantjes ハ (On the projective geometry of paths, Proc. Edinburgh Math. Soc. vol. 5, 1937, 103-115), D. van Dantzig ノ射影空間ニ於テ道ノ幾何學ヲ研究シテ居リマス。即 $\pi_{\mu\nu}^\lambda$ ヲ

$$(4.1) \quad (a) \pi_{\mu\nu}^\lambda x^\nu = \delta_\mu^\lambda \quad (b) \frac{\partial \pi_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\omega} x^\omega = -\pi_{\mu\nu}^\lambda$$

ヲ満足スル對稱射影接続ノ徑数トスレバ, D. van Dantzig ノ意味ノ拡張サレタ射影幾何學ハ

$$(4.2) \quad \bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x) \quad \left(\text{但シ } \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} x^\nu = \bar{x}^\lambda \right)$$

ナル形ノ変換下ノ $\pi_{\mu\nu}^\lambda$ ノ不変式論デアリマス。カナル空間ヲ道, 即自平行曲線ハ, 微分方程式

$$(4.3) \quad \frac{d^2 x^\lambda}{dr^2} + \pi_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr} = \alpha \frac{dx^\lambda}{dr} + \beta x^\lambda$$

ヲ定義サレマス。J. Haantjes ハ, 道 $x^\lambda(r)$ ノ上ヘアル特別ノ有次媒介変數 u^0, u^1 ヲ導入シテ道ヲ $x^\lambda(u^0, u^1)$ デ表ハシ, γ 比 u^0/u^1 カ, 接続カ標準接続ノ場合ニハ前

述ノ射影媒介変数ト一致スルコトヲ示シテモルノデアリ
マス。

コノデハコレト全然異ル方法ヲ道 $x^\lambda(\tau)$ 上ニ一ツノ射
影的ノ媒介変数ノ導入ノ可能トコトヲ示シ、コレガ標準接
續デナイ場合ニモ前述ノ射影媒介変数ト一致スルコトヲ示
シテミマセウ。

適當ノ因數 ρ ト適當ノ媒介変数 τ トヲ選ビテ、(4.3)ヲ

$$(4.4) \quad \frac{d^2 \rho x^\lambda}{d\tau^2} + \Pi_{\mu\nu}^\lambda(\rho x) \frac{d\rho x^\mu}{d\tau} \frac{d\rho x^\nu}{d\tau} = 0$$

即チ

$$(4.5) \quad \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Pi_{\mu\nu}^\lambda(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} x^\lambda \\ + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

ナル形ニ書き得ルコトハ明デアリマス。

サテコレヲ今迄吾々が考ヘテ來タ道ト比較スルタメニ

$$(4.6) \quad \xi^i = \xi^i(x^0, x^1, \dots, x^n) \quad \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\lambda} x^\lambda = 0 \right)$$

ニ依ッテ非有次座標 ξ^i ヲ導入シ

$$(4.7) \quad E_{\cdot\lambda}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\lambda}$$

トオケバ

$$(4.8) \quad E_{\cdot\lambda}^i x^\lambda = 0$$

デアリマス。コノデ更ニ x^λ / -1 次 / 有次函数デ

$$(4.9) \quad p_\lambda x^\lambda = 1$$

ヲ満足スル p_λ ヲ導入スルバ (コレハ無限遠超曲面ノ導入
デス)

$$(4.10) \quad E_j^\lambda E_{\lambda}^i = \delta_j^i, \quad E_i^\lambda p_\lambda = 0$$

ヲ満足スル E_i^λ ヲ求メルコトが出来マス。コノ $\Rightarrow (E_i^\lambda)$

ト $\begin{pmatrix} E_i^\lambda \\ p_\lambda \end{pmatrix}$ ハ互ニ逆ノ行列デスカラ

$$(4.11) \quad E_{\mu}^\lambda = E_i^\lambda E_{\lambda}^i - x^\lambda p_\mu$$

ヲ得マス。更ニ

$$(4.12) \quad T_{jk}^0 = -E_j^\mu E_k^\nu \left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} - p_\lambda \pi_{\mu\nu}^\lambda \right)$$

$$(4.13) \quad T_{jk}^i = E_{\lambda}^i E_j^\mu E_k^\nu \pi_{\mu\nu}^\lambda - E_j^\mu E_k^\nu \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

トオケバ, T_{jk}^0 ハ二次ノテンソル, T_{jk}^i ハ一ツノ對稱擬似
接續ノ張数デアルコトが判リマス。コノ $= p_\lambda$ ノ代リニ

$$(4.14) \quad \bar{p}_\lambda = p_\lambda + \varphi_\lambda$$

ヲ採用スルバ

$$(4.14) \quad \bar{E}_{\lambda}^i = E_{\lambda}^i, \quad \bar{x}^\lambda = x^\lambda, \quad \bar{E}_j^\mu = E_j^\mu - x^\mu \varphi_j, \\ \bar{p}_\lambda = p_\lambda + \varphi_\lambda$$

組シ

$$(4.15) \quad \varphi_\lambda x^\lambda = 0, \quad \varphi_j = E_j^\mu \varphi_\mu \quad (\varphi_\lambda = E_{\lambda}^i \varphi_i)$$

デスカラ, T_{jk}^0 及 T_{jk}^i ハ

$$(4.16) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \frac{\partial g_j}{\partial x^k} + g_i \Gamma_{jk}^i - g_j g_k$$

$$(4.17) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - g_j \delta_k^i - g_k \delta_j^i$$

↑ル変換ヲ受クルコトハ注意ヲ要シマス。コレハ前述ノ理論ト D. van Dantzig, J. Haantjesノ理論トノ密接ノ関係ヲ示スルガカラマス。

サテ直接ノ計算ニ依リテ

$$(4.18) \quad \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\xi^j}{dt} \frac{d\xi^k}{dt} = E_{\cdot\lambda}^i \left(\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Pi_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right) + \left(\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - E_\mu^\beta E_\nu^\gamma \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$$

ヲ示スコトが出来ます。コレハ (4.5) カラ得ラレル

$$(4.19) \quad \frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Pi_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2} x^\lambda - \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt}$$

及ビ (4.11) カラ得ラレル。

$$(4.20) \quad \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - E_\mu^\beta E_\nu^\gamma \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = -p_\mu E_{\cdot\lambda}^i - p_\nu E_{\cdot\lambda}^i$$

ヲ代入スレバ

$$(4.21) \quad \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\xi^j}{dt} \frac{d\xi^k}{dt} = -\frac{d\xi^i}{dt} \left(\frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + p_\lambda \frac{dx^\lambda}{dt} \right)$$

が得ラれます。コレヲコレノ式ノ形ヲ整ヘルタメニ

$$(4.22) \quad \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + 2p_\mu \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}$$

トオケバ, (4.21)ハ

$$(4.23) \quad \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\xi^j}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} = 0$$

トナリマス。サテ(4.22)ヲ更ニ微分スレバ

$$\begin{aligned} \frac{2}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} - p_\lambda \Pi_{\mu\nu}^\lambda \right) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \\ + 2p_\lambda \left(\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Pi_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right) \\ = \frac{\frac{d^3 t}{ds^3}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^3} - 2 \frac{\left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)^2}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^4} \end{aligned}$$

カ得ヲレマスガ, コレ = (4.19) 及ビ (4.12) カヲ得ヲレル

$$(4.24) \quad -E_{\mu}^j E_{\nu}^k \Gamma_{jk}^0 = \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} - p_\lambda \Pi_{\mu\nu}^\lambda + p_\mu p_\nu$$

ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned} (4.25) \quad \frac{\frac{d^3 t}{ds^3}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^3} - 2 \frac{\left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)^2}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^4} \\ = -2 \Gamma_{jk}^0 \frac{d\xi^j}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} - \frac{2}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 - \frac{4}{\rho} \frac{d\rho}{dt} p_\nu \frac{dx^\nu}{dt} - 2p_\mu p_\nu \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \end{aligned}$$

ヲ得マス。今 (4.25) = (4.22) / 自乗 / 半分ヲ加ヘル、

$$(4.26) \quad \{t, s\} = -2P^0_{jk} \frac{d\xi^j}{ds} \frac{d\xi^k}{ds}$$

トナツテ、吾々ノ導入シタ左ハ、射影媒介変数デアルコトが判
リマス。

接続カ標準トイフ條件ヲ加ヘタイトヤハ、計算デ証明
サレル。

$$(4.27) \quad R^i_{jkh} + P^0_{jk} \delta^i_h - P^0_{jh} \delta^i_k - \delta^i_j (P^0_{kh} - P^0_{hk}) \\ = E^i_{\cdot\lambda} E^j_{\cdot\mu} E^k_{\cdot\nu} E^h_{\cdot\omega} \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$$

ヲ利用シマス。但シコトニ

$$(4.28) \quad R^i_{jkh} = \frac{\partial P^i_{jk}}{\partial x^h} - \frac{\partial P^i_{jh}}{\partial x^k} + P^a_{jk} P^i_{ah} - P^a_{jh} P^i_{ak}$$

及ビ

$$29) \quad \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\omega}} - \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\omega}}{\partial x^{\nu}} + \Pi^{\alpha}_{\mu\nu} \Pi^{\lambda}_{\alpha\omega} - \Pi^{\alpha}_{\mu\omega} \Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}$$

デアリマス。コトヲ

$$(4.30) \quad \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\lambda} = 0$$

ナル條件ヲオイテ

$$\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} x^{\mu} = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} x^{\nu} = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} x^{\omega} = 0$$

ニ注意スルバ、前ト同様ニシテ

$$P^0_{jk} = -\frac{1}{n^2-1} (nR_{jk} + R_{kj}) \quad (R_{jk} = R^i_{\cdot jki})$$

が得られ、これを (4.26) に代入して

$$(4.31) \quad \{t, s\} = \frac{2}{n-1} R_{jk} \frac{d\xi^j}{ds} \frac{d\xi^k}{ds}$$

が得られよう。