



Title	或ル種ノ函數方程式ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 262, p. 90-98
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75103
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1170. 或ル種ノ函数方程式ニ就イテ

春 木 博(神戸商船)

§ 1. 南雲, 角谷西先生ハ全国紙上数学談話會第66号ニ於テ次ノ美麗ナル定理ヲ証明サレタ。

[定理1] $f(x, y)$ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ ナニ定義サレタ一價実数值連續函数トスル。平面上ノ任意ノ点 P ヲ中心トシテ, 任意ノ半径ノ円ヲエカキ, ヲノ周囲ヲ n 等分シ、ノノ分点ヲ夫々 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ トスルトキ, 常ニ

$$\frac{1}{n} \{f(Q_1) + f(Q_2) + f(Q_3) + \dots + f(Q_n)\} = f(P)$$

ナラバ, $f(x, y)$ ハ複素係数ヲ持ツ複素数変数ノ高々 $n-1$ 次ノ多項式ノ実数部, 即チ $R(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1})$ ニ等シイ。又解ハ $1/n$ 限ル。($z = x + iy$)

次 = 2 の定理 = 於て、 $n=3$ のトキ、幾何學の意味ヲ更ニ求メテ見ヨク。

上ノ定理ヲ $n=3$ のトキニ、云ヒ換ヘレバ次ノヤウナル。

定理 2 $f(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ テ定義サレタ一價實數値連續函數トスル。平面上ニ任意ノ正三角形 $Q_1 Q_2 Q_3$ ヲ取リ、 $\triangle Q_1 Q_2 Q_3$ ノ頂点 Q_1, Q_2, Q_3 テ $f(x, y)$ が取ル値ノ算術平均ガ $\triangle Q_1 Q_2 Q_3$ ノ重心 P テ取ル値 $f(P)$ = 常ニ等シイ + ラバ $f(x, y)$ ハ複素係數ヲ持ツ複素數変數ノ高々二次ノ多項式ノ實數部、即チ $R(a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2)$ = 等シイ。又解ハソレニ限ル。($Z = x + iy$)

コノデ、 $R(a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2)$ ハ x, y ノ調和函數ナル故、結局 $f(x, y)$ ハ $f(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy + cx + dy + e$ ノ形ニ書ケル。茲ニ a, b, c, d, e ハ任意ノ實常數ナリトスル。

サテ解析幾何學一次ノ定理ガアル。

(Poncelet - Brianchonノ双曲線ニ關スル定理)

直角双曲線上ニ、三頂点 Q_1, Q_2, Q_3 ヲ持ツ三角形 $Q_1 Q_2 Q_3$ ノ重心ハソノ直角双曲線上ニアル。

(系) 直角双曲線上ニ、三頂点 Q_1, Q_2, Q_3 ヲ持ツ正三角形 $Q_1 Q_2 Q_3$ ノ重心ハソノ直角双曲線上ニアル。

コノ系ヲ上述ノ函數方程式ノ結果ヨリ証明シテ見ヨク。

$f(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy + cx + dy + e$ トリ、
 定理2 = 於テ $f(x, y) = 0$ トル曲線ヲ考ヘレバ之ハ直角双
 曲線ノ一般形ナリ。

ソノ上ノ三點 Q_1, Q_2, Q_3 ハ $f(x, y)$ ノ零點ニナル。
 故ニ定理2ノ結果ヨリ

$$f(P) = \frac{1}{3} \{f(Q_1) + f(Q_2) + f(Q_3)\}$$

故ニ $f(P) = \frac{1}{3} (0 + 0 + 0) = 0$

故ニ點Pハ $f(x, y)$ ノ零點トナリ、從ツテPハ直角双
 曲線上ニアルコトガ証明サレタ。

次ニ函数 $f(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy + cx + dy + e$
 ノ他ノ似タ方面カラ考ヘテ見ヨウ。

先ツ定理3ヲ証明スル。

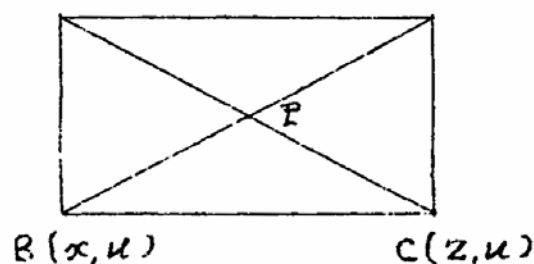
定理3 $f(x, y)$ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ ニテ
 定義サレタ一變實數値函数トシ、 x 及ビ y ニツイテ夫々可
 測ナリトスル。今平面上ニ、 x 軸、 y 軸ニ夫々平行ナ近ヲ持
 ツ任意ノ矩形 $ABCD$ ヲユガヤ、其ノ重心(中心)ヲPトス
 ルトキ、唯ニ

$$f(P) = \frac{1}{4} \{f(A) + f(B) + f(C) + f(D)\}$$

ナラバ $f(x, y) = axy + bx + cy + d$ トナル。又解ハソ
 レニ限ル。故ニ a, b, c, d ハ任意ノ實數ナリトスル。

(証明) 點Aノ座標ヲ (x, y) 、點Cノ座標ヲ (z, u)
 トスレバ B, Dノ座標ハ夫々 (x, u) 、 (z, y) トナリ、又P
 ノ座標ハ

$A(x, y)$ $D(z, y)$ $\left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+y}{2}\right)$ トナルカラ,



單へラレタ函数方程式ハ次ノ

マデニ書ケル。

$$f\left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+y}{2}\right) = \frac{1}{4} \{f(x, y) + f(x, u) + f(z, u) + f(z, y)\}$$

コノ式ニ於テ $u=y$ トスレバ

$$f\left(\frac{x+z}{2}, y\right) = \frac{1}{4} \{f(x, y) + f(x, y) + f(z, y) + f(z, y)\}$$

$$\text{故ニ} \quad f\left(\frac{x+z}{2}, y\right) = \frac{1}{2} \{f(x, y) + f(z, y)\}$$

$f(x, y)$ ハ x ニツイテ可測ナル故、之ヨリ

$$f(x, y) = \alpha(y)x + \beta(y)$$

同様ニシテ $f(x, y)$ ハ y ニツイテ可測ナル故、結局 $f(x, y)$ ハ y ニツイテ α linear トナル。

$$\text{結局} \quad f(x, y) = axy + bx + cy + d$$

茲ニ a, b, c, d ハ任意ノ實数ヲ表ス。

コノ結果ニ於テ座標軸ヲ廻転サセルコトニヨリ次ノ定理ヲ得ルコトハ明カデアアル。

定理4 $f(x, y)$ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ ナ

定義サレタ一價實數値函数ヲ x 及ビ y ニツイテ、夫々可測ナリトスル。今 x 軸ト一边カ一定角 α (正ノ方向ニ) ヲナス。

意、矩形 $ABCD$ を取れば、その重心（中心）を P とすれば
 $\text{重心} = f(P) = \frac{1}{4} \{f(A) + f(B) + f(C) + f(D)\}$ となる。
 $f(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy + cx + dy + e$ とする。
 又解は ∞ に限る。故に a, b, c, d, e は実数で $b = -2ax$
 $\cos 2\alpha$ とする。

序でから、**定理 3** を更に云へ換へると次のようになる。

定理 3' $f(x, y)$ が $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$
 で定義される二変実数値関数で、 x 及び y のいずれも夫々可
 測とする。今 x 軸及び y 軸に夫々平行な辺を持つ任意
 の矩形を $ABCD$ とすれば、三次元空間に於て $Z = f(x, y)$
 による曲面上の四角 $f(A), f(B), f(C), f(D)$ の四頂点と
 する四面体の重心が $\text{重心} = \text{曲面 } Z = f(x, y) \text{ 上}$ となる。
 又 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ とする。又解は ∞
 に限る。

故に a, b, c, d, e は任意の実数である。 $Z = f(x, y)$
 は一般に双曲拋物線面となる。

§ 2. $f(x)$ が $x > 0$ で定義される一変実数値関数と
 すれば、次の函数方程式を満たすものを求めよう。但し a
 は正の実数とする。

$$(1) \quad f(ax) = f(x)$$

$g(x) = f(e^x)$ とおけば $g(x)$ は $-\infty < x < +\infty$ で
 定義される一変実数値関数で (1) から容易に判る。

=

$$g(x + \log \alpha) = g(x)$$

ヲ満足サセル。

故 = $f(x) = g(\log x)$

之ガ (1) ヲ満足スルコトハ明ラカダアル。茲ニ $g(x)$ ハ $-\infty < x < +\infty$ デ定義サレタ $\log \alpha$ ヲ週期トスル任意ノ一價実数値函数トスル。

次ニ、 $f(x)$ ヲ $x > 0$ デ定義サレタ一價実数値函数トスルトキ、次ノ函数方程式ヲ満足サセルモノヲ求メヨウ。但シ α, β ハ正ノ常數トスル。

$$(2) \quad f(\alpha x) = f(\beta x)$$

$$(2) = \text{於テ } x \text{ ノ代リ} = \frac{x}{\beta} \text{ トオケバ}$$

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}x\right) = f(x)$$

結局 (1) ノ函数方程式ニ帰着サレタコトニナル。故ニ求ムル解ハ $g(x)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$ デ定義サレタ一價実数値函数ヲ $\log \frac{\alpha}{\beta}$ ヲ週期トスル任意ノ函数トスレバ $f(x) = g(\log x)$ ニテ與ヘラレル。

次ニ $f(x)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$ デ定義サレタ一價実数値連続函数トシ、次ノ函数方程式ニ適スルモノヲ求メヨウ。但シ、 a, b ハ実常數デ $|a| \neq 1$ ナリトスル。

$$(3) \quad f(ax+b) = f(x)$$

先ツ $|a| < 1$ ノ時カラ始メル。

(3) より任意、自然数 n に対し

$$f(x) = f(a^n x + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + b)$$

ヲ得ル。即チ

$$f(x) = f\left\{a^n x + \frac{b(1-a^n)}{1-a}\right\}$$

茲デ、 $n \rightarrow \infty$ となシムレバ $|a| < 1$ ナラバ $f(x)$ が連続ナルコトカラ

$$f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$$

即チ $f(x) \equiv \text{constant}$

ヲ得ル。

次 $|a| > 1$ となラバ (3) より

$$f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right)$$

カウスレバ $|\frac{1}{a}| < 1$ となルカラ前ト同様ニシテ

$$f(x) \equiv \text{constant}$$

結局求ムル解ハ

$$f(x) \equiv \text{constant}$$

§ 3. $f(x)$ が $-\infty < x < +\infty$ で定義サレタ一複素数値函数トシ、 $f(x)$ = 何等解析的性質 (連続性、微分可能性、可測性) ヲ具ヘナイトスル。コノ時函数方程式

$$(4) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

ヲ満足セシメル $f(x)$ ハ如何ナル形ヲ持ツカ。 $f(x) \equiv 0$ ハ

除リ、

直チニ豫想セラレルコトハ $h(x)$ ヲ適當ニ $Idamel$
ノ解 (函数方程式 $f(x+y) = f(x) + f(y)$) ノ解ヲ指入
トスルトキ

$$\cos[h(x)], \cos h[h(x)]$$

ト書ケハシタイカト云フコトデアラ。以前筆者ハ雜誌函数
方程式第二十三号ニ於テ、此ノ方程式ヲ論シタガ、ソコ
デハ解ガ $f(x) \geq 1$ トルトキト $|f(x)| \leq 1$ トルトキニ分レ、
又 $f(x) \geq 1$ トルトキハ有理数 $x = \text{対シ}$ $\cos h$ ノ x トナル
コトヲ述ベタ。又ハ実数トスル。

又雜誌函数方程式第四十一号ニテ上記(4)ノ函数方程
式ト

$$(5) \quad f^2(x+y) + f^2(x) + f^2(y) - 2f(x)f(y)f(x+y) = 1$$

トノ關係ヲ矢張り解析的性質ヲ假定セズニ論シタガ、何レ
ノ場合ニ於テモ、符号ノ吟味ガ困難トナリ、完全ニハ解決サ
レナイ。御研究イラベ御教示願ヒタイ。

序デナカヲ雜誌函数方程式第四十一号ノ拙文ニ於テ
37P. 下カラニ行目「換言スレバ(容易ニ判ルヤ)ニ」
「 $\{f^2(x)-1\}\{f^2(y)-1\} \neq 0$ ナル $x, y = \text{対シテハ}$ 」ト云フ
文句カアルガ、之ハ間違ヒデ且ツ餘計ナ文句デアルカラ、削
除スル。

(追記)

定理1 = 於ケル尙要、角谷兩先生ノ証明カラ容易ニ判

ルヌ γ ニ、複素係数ヲ持ツ n 次ノ複素変数ノ多項式ノ特有性質ヲ導キ出スコトガ出来ル。

多項式ノ特有性質 $f(z)$ ヲガウス平面上ニ於テ $|z| < +\infty$ ニテ一様正則（即チ整函数）トスル。今ガウス平面上ニ任意ノ正 $(n+1)$ 多角形ヲエカキ、ソノ $(n+1)$ 個ノ頂点ノ重心ヲ P トシ、コノ正多角形ノ各頂点ノ $w = f(z) = \gamma$ ツテノ w 平面ヘノ像点ヲ夫々 $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \dots, Q'_{n+1}$ トスルトキ、 $f(P)$ ガ $(n+1)$ 個ノ点 $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \dots, Q'_{n+1}$ ノ重心トラバ $f(z)$ ハ高々 n 次ノ多項式デアル。

——（完）——