



Title	有向集合ニ関スルー補題
Author(s)	岩村, 聯
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 262, p. 107-111
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75106
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1173. 有向集合 = 閉スルー 補題

岩 村 聡 (名大)

§1. 反射的 $\prec$ 関係 $\prec$ の定義サレタ 集合 M が次の性質ヲ有スルトキ, M ヲ $\prec$ 有向集合ト言ヒマス: M の任意ノ有限部分集合 X ニ對シテ適當ナ $y \in M$ ヲ取レバ, スベテノ $x \in X$ ニ對シテ $x \prec y$. コレハ 関係 $\prec$ が推移的ナラバ, 普通ノ有向集合ノ定義ト一致シマス. 以後ギリシヤ小文字ヲ超限順序数ヲ表スコトニスレバ, 我々ノ補題ハ:

$\prec$ 有向集合 M が無限集合ナラバ, M ノ部分集合ノ系列 $\{M_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ が次の性質ヲ有スルモノカ存在スル:

- (1) 各 M_α ハ $\prec$ 有向集合
- (2) 各 M_α ノ濃度 $\bar{M}_\alpha < \bar{M}$
- (3) $\alpha < \beta < \lambda$ ノトキ $M_\alpha \subseteq M_\beta$
- (4) $M = \bigcup_{\alpha < \lambda} M_\alpha$ (合併集合)

証明: 選擇公理ニヨレバ 次ノ性質ノフル函数 f が存在シマスカラ, ソノ一ツヲ固定シテ考ヘマス: M ノスベテノ有限部分集合 X ニ對シテ $f(X) \in M$ が (unique =) 定マリ, スベテノ $x \in X$ ニ對シテ $x \prec f(X)$.

補題ハ $\bar{M} = \aleph$. ノトキハ殆ンド明カデスガ, 念ノヲトニ証明スレバ 次ノ通り. M ノ有限部分集合ノ單調増大列

$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \dots \Rightarrow M = \bigcup_n X_n$
 + $\in$ (が存在シマスカラ其ノ一ツ)ヲ取ツテ, 帰納法デ,
 $X_0 = f(X_0)$ ヲ附ケ加ヘタ $\in$ ノヲ M_0 , $X_{n+1} \cup M_n =$
 $f(X_{n+1} \cup M_n)$ ヲ附ケ加ヘタ $\in$ ノヲ M_{n+1} ト定義スレバ
 $\prec$ が反射的+関係デスカラ各 M_n ハ $\prec$ 有向集合 (性質 D);
 又 $\overline{M_0} < \aleph_0$ ハ明瞭, $\overline{M_n} < \aleph_0$ + ラバ $\overline{M_{n+1}} < \aleph_0$ ニ達シ
 テ, $\forall n$ $M_n = \text{ツイテ}$ $\overline{M_n} < \aleph_0$ (性質 2); 又定義カ
 ラ $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \dots$ (性質
 3); 最後 $M = \bigcup_n X_n$ ト $X_n \subseteq M_n \subseteq M$ トカラ
 $M = \bigcup_n M_n$ が出マス (性質 4).

次 $\overline{M} > \aleph_0$ ノトキ, 任意ノ $N \subseteq M$ ニ對シテ
 $F_1(N) = N \cup \{f(x) \mid x \in N, \overline{x} < \aleph_0\}$ トシ, 帰納法
 デ $F_{n+1}(N) = F_1(F_n(N))$ トシテ
 $F_1(N) \subseteq F_2(N) \subseteq \dots$
 ヲ定メテ, $F_\omega(N) = \bigcup_n F_n(N)$ ト置キマス ($n = 1, 2, \dots$).

此ノトキ $x \in F_\omega(N)$, $\overline{x} < \aleph_0$ + ラバ x ハ或ル $F_n(N)$
 ニ含マレ, 従ツテ $f(x) \in F_\omega(N)$. ソレ故

1)' $F_\omega(N)$ ハ $\prec$ 有向集合

次 $\{x \mid x \in N, \overline{x} < \aleph_0\}$ ノ濃度ハ, $\overline{N} < \aleph_0$ + テ $< \aleph_0$,
 $\overline{N} \geq \aleph_0$ + ラ $= \overline{N}$, 何レ α ニテモ $\leq \overline{N} \cdot \aleph_0$.

従ツテ $\overline{F(N)} \leq \overline{N} \cdot \aleph_0$.

帰納法デ $\overline{F_n(N)} \leq \overline{N} \cdot \aleph_0$.

故 = $\overline{F_\omega(N)} \subseteq \overline{N} \cdot \aleph_0$.

ココデ $\overline{M} > \aleph_0$. ヲ使ヘバ

$$2)' \quad \overline{N} < \overline{M} \quad \text{ノトキ} \quad \overline{F_\omega(N)} < \overline{M}$$

又, 明カニ

$$3)' \quad N \subseteq N' \quad \text{ノトキ} \quad F_\omega(N) \subseteq F_\omega(N')$$

$$4)' \quad N \subseteq F_\omega(N) \subseteq M$$

サテ整列定理ニヨレバ M ノ部分集合ノ系列 $\{N_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ が存在シテ

$$2)'' \quad \overline{N_\alpha} < \overline{M}$$

$$3)'' \quad N_\alpha \subset N_\beta \quad (\alpha < \beta < \lambda)$$

$$4)'' \quad M = \bigcup_{\alpha < \lambda} N_\alpha$$

ソコデ $M_\alpha = F_\omega(N_\alpha)$ ト置ケバ 1)' カラ 1), 2)' 及ビ 2)'' カラ 2), 3)' 及ビ 3)'' カラ 3), 4)' 及ビ 4)'' カラ 4) が出テ 証明が終リマス。

証明ヲ上記ノ様ニ簡單ニ述ベルコトが出来タノハ伊藤清先生ノ御注意ニヨレモ、デアルコトヲ附言シテ、同先生ヘノ感謝ノ意ヲ表シマス。

§2. 前§ノ補題ハ J. von Neumann, "Zur allgemeinen Theorie des Masses" (Fund. Math. 13) = 見出サレル誤リヲ訂正シヨウトシテ到達シタモ、デスガ、他ニモ使ヘサウニ思ヒマス、デ、應用ノ例

トシテ其、訂正モ述ベテ見マス。

上記論文ニ次ノ定理ガアリマス：

群 G ノ部分群ノトス $\subseteq$ 有向集合 M ガアツテ $G = \bigcup_{H \in M} H$
且ツ各 $H \in M$ ガ可測デアルトスル。此ノトキ G ハ可
測デアアル。

此処デ、不必要ナカラ、群 G ガ可測デアルトイフ事ノ
定義ヲ附言シマス： G ノスベテノ部分集合ニ對シテ定義
サレタ有限加減的測度 μ デ $\mu(G) = 1$ 且ツ左不変：
 $\mu(aH) = \mu(H)$ ($H \subseteq G, a \in G$) ナルモノガ存
在スルトキ G ハ可測デアルトイハレル。

von Neumann ハ特ニ M ガ $\subseteq$ 整列集合デア
ル場合ニツイテ定理ヲ、多少言ヒ足リス所モアリマスガ、巧妙
ニ証明シテ居リマス。

一般ノ場合ヲコノ特殊ナ場合ニ帰着サセルトコロニ誤
リガアリマスノデ、其處ダケヲ我々ノ補題デ証明シテ見
マス。

先ツ $\overline{M} < \aleph$ 。ノトキハ $G \in M$ デ *trivial*。ヤ
或ル超限計量数トシ、 $\overline{M} < \aleph$ ノトキハ定理ガ成立スルモ
ノト假定シ、 $\overline{M} = \aleph$ ノトキニ証明シマス。 $\overline{M} = \aleph$ ト
シテ、補題ノタリナ $\{M_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ ($\aleph$ ノ代リニ $\leq$ 、
即チ集合ノ包含關係ヲ置ク)ヲ取リ

$$G_\alpha = \bigcup_{H \in M_\alpha} H \quad (\alpha < \lambda)$$

トスレバ, 上ノ假定ト補題ノ 1), 2) トニヨツテ, $\mathcal{O}_\alpha$ ハ何レモ可測. 又 3) ニヨツテ $\{\mathcal{O}_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ ハ $\subseteq$ 整列集合. 又 4) ニヨツテ $\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{O}_\alpha$.

従ツテ, 前記ノ特殊ナ場合ニ關スル定理ニヨツテ, $\mathcal{O}$ ガ可測ニナリマス.