



Title	$x^y = y^x$ ($0 < x < y$) の有理数解ニツイテ
Author(s)	遠山, 啓
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 263, p. 126-128
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75110
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1177 $x^y = y^x$ ($0 < x < y$) の有理数解 ＝ ツ イ テ

遠 山 啓 (東京工大)

$x^y = y^x$ ($0 < x < y$), 整数解ヲ求メル問題が Carmichael / *Diophantine Analysis*, 113 頁ニ載ッテ居ル。クシ擴張シテ有理解ヲ求メル問題ヲ解イテ見セウ。結果ハスベテノ解ガ

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ y &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned} \right\} (n=1, 2, 3, \dots)$$

デアリ、証明ハ初等的デ、極メテ簡單ニ出来ル。

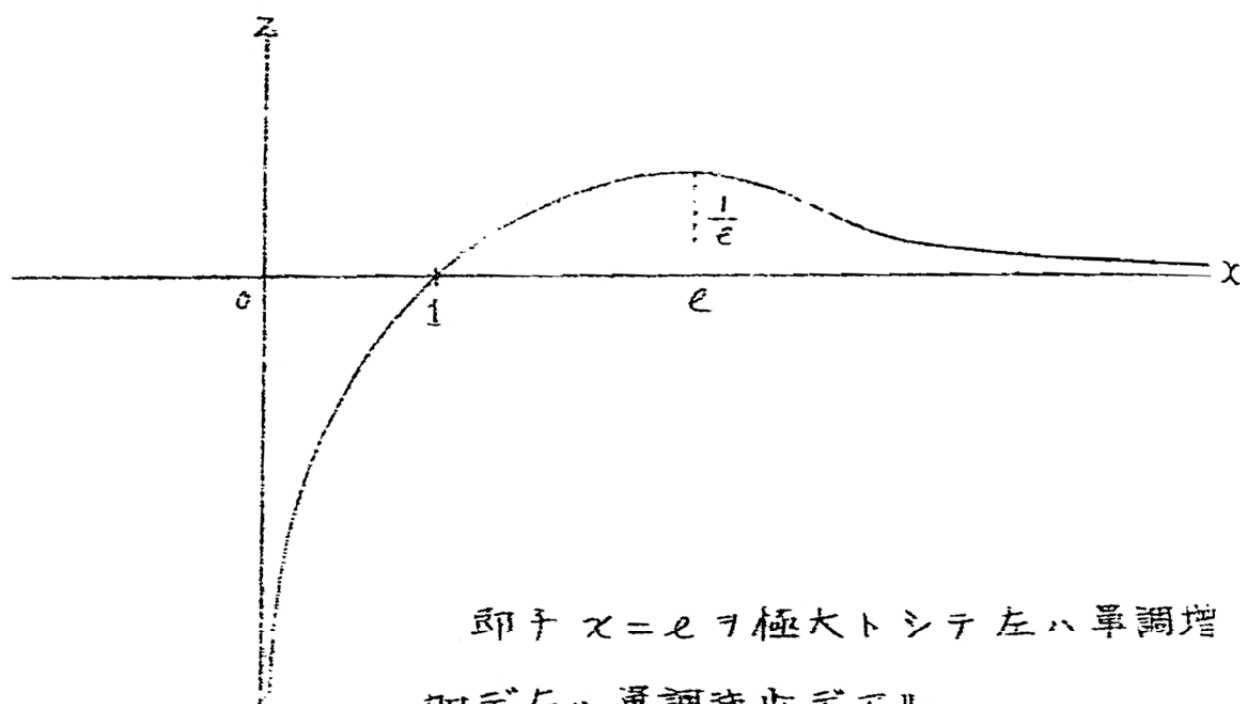
先ヅ方程式ノ $\log$ ヲ取ツテ見ルト、

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

トナル。コノ解ノ性質ヲ見ルタメニ

$$Z = \frac{\log x}{x}$$

ナル曲線ヲ追跡シテ見ルト、次ノヤウニナル。



即ち $x=e$ を極大トシテ左ハ單調増加デ右ハ單調減少デアル。

故ニ(2)ヲ満足スル x, y ハ相互ニ一意的ニ他ヲ決定スル等デアル

$\frac{y}{x} = (1 + \frac{1}{t})$ ト置ケバモ一意的ニ決定サレル。

之ヲ原方程式ニ代入スルト

$$x^{x(1+\frac{1}{t})} = (x(1+\frac{1}{t}))^x$$

トナルカラ

$$x^{1+\frac{1}{t}} = x(1+\frac{1}{t})$$

$$x = (1+\frac{1}{t})^t \quad \text{ヲ得ル。}$$

$$y = (1+\frac{1}{t})^{t+1} \quad \text{ナルコトハ明カデアル。}$$

又、 x, y が有理数ナルコトカラ、 t モ亦有理数デアル。

$$t = \frac{n}{m} \quad (m, n) = 1$$

ト置ク。我々ハコゝデ $m = 1$ ナルコトヲ証明スレバ充分
デアル。若シ $m > 1$ トスルト、

$$x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = \left(\frac{n+m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$$

之ガ有理数ナル爲ニハ

$$\begin{cases} n + m = a^m \\ n = b^m \end{cases}$$

トナル。

$$m = a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + b^{m-1})$$

然ルニ右辺ハ明カニ

$$(a - b) \underbrace{(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + b^{m-1})}_{m \text{ 個}} > m$$

トナル。故ニ $m > 1$ トナルコトハ出来ヌ。即チ $m = 1$ デナ
ケレバナラス。

故ニ $x^y = y^x$ ($0 < x < y$) / 有理数解ハ

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ y &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

デ盡サレル。コノ解ガエヲ挟ンデレニ近ヨルコトモ明カデ
アラウ。 (終)

(昭和19年5月3日)