



Title	σ -完備ベクトル束ニ於ケル區間系ニ就テ
Author(s)	宮崎, 貞孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 264, p. 144-151
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75113
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1180 $\mathcal{G}$ -完備ベクトル束ニ於ケル 區間系ニ就テ

宮崎 貞孝(東京)

區間系ノ理論ハ *Denjoy* 積分ノ基礎トシテ重要ナル
ガ、此處デハ結合束種論ノ應用トシテ $\mathcal{G}$ -完備ベクトル束
ニ於ケル區間系ノ理論ヲ展開スル。以下ニ引用スル文献ハ

中野秀五郎氏: *Abstract spectral theory*
位相数学 第四卷第一号(昭和十六年十一月)

宮崎貞孝: 結合束種ニ於ケル局所主イデアールト
Boole 代数ニ就テ、 全國紙上数学談話會 第256号
(昭和十八年八月)

デアルガ前者ハ中野定理3.10, 後者ハ宮崎定理3.1ノ如
クニ引用スル。尚ホ結合束種ニ就テハ *S. Miyazaki:*
Verbandart, 教務記事, 第25卷(1943)ヲ参照サ
レタイ。

定義1. $\mathcal{G}$ -完備ベクトル束 M ニ於テ

$a \leq r \leq b$ ヲ満足スル元スノ総テノ集合ヲ閉區間
ト云ヒ、 $[a, b]$ デ表ハス。

M ニ於テ $a + b = c + d$ ナルトキ

(a, b, c, d) ト置イテ結合束種ヲ導入スル。

(a, b, c, μ) ナルトキ $a +_{\mu} b = c$ 又ハ $a + b = c$
 (μ) ト置イテ、 $\alpha = \alpha(a - \mu) + \mu$ ナル演算ヲ $\alpha_{\mu} a$ デ表ハ
シバ、 M ノ元ハ $a +_{\mu} b = c$ 及ビ $\alpha_{\mu} a$ ナル演算ニ因シテ、

ノ本来ノベクトル束ト同型ナルヲ零元トスル G - 完備ベクトル束ヲナス。但シ此處ニ α ハ實数トスル。

定義2. $a \leq b$ ナルトキ $|a|_p \sim |b|_p = p$ ヲ満足スル元、即チ a, b ノ直交因子ヲ $[a, b]$ ノ端元ト云フ。 $[a, b]$ ノ総テノ端元ノ集合ヲ $\mathcal{B}(a, b)$ デ表ス。

定義3. $[a, b]$ ノ端元ヲ c, d トスルトキ $\mathcal{B}(a, b)$ キ $\mathcal{B}(c, d)$ ナラバ $(c \sim d, c \cup d)$ ヲ $[a, b]$ ノ邊區間ト云フ。 $[a, b]$ ノ如何ナル邊區間ニモ屬セザル元ヲ $[a, b]$ ノ内元ト云ヒ、 $[a, b]$ ノ内元ノ総テノ集合ヲ (a, b) デ表ハシ開區間ト云フ。

以上ヨリ開區間ノ分割ニ関シテ次ノ定理が成立スル。

定理 $[a, b]$ ノ内元 C ヲ含ム閉區間トスルトキ、次ノ條件ヲ満足スル閉區間系 Δ が存在スル。

1° Δ = 屬スル閉區間ハ總テ $[a, b]$ = 含マレル。

2° Δ = 屬スル閉區間ハ C ヲ端元トスル。

3° Δ = 屬スル相異ナル閉區間 Δ_k, Δ_l ノ共通部分ハ Δ_k 及び Δ_l ノ邊區間デアル。

4° $[a, b]$ ノ任意ノ元ヲ含ム様ナ Δ = 屬スル閉區間ガ少クとも一ツ存在スル。

此ノ定理ヲ證明スル爲ニ必要ナ補題ヲ次ニ順次述ベル。

補題1. $\mathcal{B}(a, b)$ ハ a, b ヲ夫々最小元、最大元トスル Boole 代数ヲナス。

證 コレハ宮崎定理4.1デアルガ、此ノ部分が缺ケテキルノデ此處ニ補ツテ置ク。一般ニ a, b ノ間ニ順序関係ガ

必ズシモナイ場合ニハ $\mathcal{B}(a, b)$ ハ $a \sim b, a \vee b$ ヲ夫々最小元、最大元トスル *Boole* 代数ヲナス。何故ナラバ、 a, b 、 $\perp$ 直交因子ヲ c, d トスレバ、 $e \sim d, c \vee d, c, d$ 、直交因子デアルカラ、宮崎定理 3.3ニ依リ a, b 、直交因子ト成ル。依リテ $\mathcal{B}(a, b)$ ハ部分束ヲナス。且ツコレハ分配束デアル。次ニ任意ノ $\mu \in \mathcal{B}(a, b)$ ニ対シテ (a, b, μ, g) トナル g ヲトレバ $\mu \sim g$ ハ a, b 、直交因子デアルカラ $|a| \mu \sim g \sim |b| \mu \sim g = \mu \sim g$ 。然ルニ $|a| \mu \sim g \geq a$ 、 $|b| \mu \sim g \geq b$ デアルカラ $\mu \sim g \geq a \sim b$ 。ス $a \sim b$ ハ μ, g 、直交因子ト成ルカラ同様ニシテ $a \sim b \geq \mu \sim g$ 。コレヨリ $\mu \sim g = a \sim b$ 。

次ニ (a, b, μ, g) ヨリ $(a \sim b, a \vee b, \mu \sim g, \mu \vee g)$ トナルカラ $\mu \vee g = a \vee b$ トナリ g ハ μ ノ補元デアル。

補題 2. $\{c \sim d, c \vee d\}$ ガ $\{a, b\}$ ノ辺區間デアルタメノ必要ニシテ且充分ナル條件ハ、 c, d ガ $\{a, b\}$ ノ端元デ $c \vee d \neq a, c \vee d \neq b$ ノヤクトモーツガ成立スルコトデアル。

證. $\{c \sim d, c \vee d\}$ ガ $\{a, b\}$ ノ辺區間トスレバ、定義ヨリ $e, f \in \mathcal{B}(a, b)$ 、 $\mathcal{B}(e, f) \neq \mathcal{B}(a, b)$ 、 $e \sim f = c \sim d$ 、 $e \vee f = c \vee d$ ナル e, f ガ存在スル。補題 1ニ依リ $e \sim f$ 、 $e \vee f$ ハ $\{a, b\}$ ノ端元デアルカラ、宮崎定理 3.5, 3.6ヨリ c, d ハ $c \sim d, c \vee d$ ノ直交因子デアルコトヨリ $c, d \in \{a, b\}$ ノ端元ト成ル。次ニ若シ $c \sim d = a, c \vee d = b$ トスレバ (a, b, c, d) ト成ルカラ、 (c, d, e, f) トヨリ (a, b, e, f) トナリ。宮崎定理 4.2ヨリ $\mathcal{B}(a, b) = \mathcal{B}(e, f)$

トナルカラ $c \sim d \neq a$, $c \sim d \neq b$ / 中少クトモーツハ成立シナケレバナラナイ。

逆 = c, d が $[a, b]$ / 端元デ $\mathcal{B}(a, b) = \mathcal{B}(c, d)$ ナラバ $c \sim d = a$, $c \sim d = b$ フ得ルカラ, $c \sim d \neq a$, $c \sim d \neq b$ / 中少クトモーツが成立スレバ $\mathcal{B}(a, b) \neq \mathcal{B}(c, d)$ トナル。

補題 3. $[a, b]$ / 辺區間 / 辺區間ハ $[a, b]$ / 辺區間デアル。

補題 4. $[a, b]$ / 端元、辺區間ハ $[a, b] = \text{含マレル}$ 。

補題 5. ニツノ閉區間 $[a, b]$, $[c, d]$ が共通元ヲ有スルタメノ完全條件ハ $a \sim c \leq b \sim d$ デ、其ノ共通元ノ總テノ集合ハ閉區間 $[a \sim c, b \sim d]$ デアル。

補題 6. μ が a ト c , a ト e トノ直交因子デ $f \in \mathcal{B}(c, e)$ ナラバ, μ ハ a ト f トノ直交因子デアル。

證 $|a| \wedge |c| = \mu$, $|a| \wedge |e| = \mu$ $\{\mu\}$

ヨリ $|a| \wedge |e - c| = \mu$ $\{\mu\}$

$g = a +_c c$ ト置ケバ $|g - c| \wedge |e - c| = \mu$ $\{\mu\}$

即チ $|g|_c \wedge |e|_c = c$ (宮崎定理 3.1)

コレヨリ $|g|_c \wedge |f|_c = c$ 即チ

$|a| \wedge |f - c| = \mu$ $\{\mu\}$

コレヨリ $|a|_\mu \wedge |f|_\mu = \mu$ フ得ル。

補題 7. $x = \underset{c}{P_B} a (= P_{Bc} a)$ デアルタメノ完全條件ハ $x \in \mathcal{B}(a, b)$, $x \in \mathcal{B}(a, c)$, $x \in \mathcal{B}(b, c)$ / が同時ニ成立スルコトデアル。

證 $|a - P_b a| \wedge |b| = c$ $\{c\}$,

$|a - P_b a| \wedge |P_b a| = c$ $\{c\}$

$$\text{ヨリ } |a - p_b a| \wedge |b - p_b a| = c \quad (c)$$

が成立スルカラ $p_b a \in \mathcal{D}(a, b)$ 後ハ中野定理 5.3 及び宮崎定理 5.1, 6.2 ヨリ證明サレル。

補題 8. $C \in (a, b)$ デアルタメノ完全條件ハ $C \in [a, b]$ デ $\mu \in [a, b]$, $\mu \neq a$ ナルトキ $C \wedge \mu \neq a$ デ, $g \in [a, b]$, $g \neq b$ ナルトキ $C \sim g \neq b$ デアルコトデアル。

次ニ愈々本定理ヲ證明スル。

證明 $[a, b]$ ノ端元ヲ ℓ トスルトキ、

$(\ell \wedge C, \ell \sim C)$ ノナス閉區間系 Δ ハ條件 1°, 2°, 3°, 4° ヲ満足スル。此処ニ ℓ ハ $[a, b]$ ノ端元ヲトルモノトスル。

Δ ガ條件 1°, 2° ヲ満足スルコトハ容易ニ證明サレルカラ條件 3° ヲ満足スルコトヲ證明シヤウ。

$[a, b]$ ノ相異なる端元ヲ ℓ , ℓ' トスルトキ, $(\ell \wedge C, \ell \sim C)$, $(\ell' \wedge C, \ell' \sim C)$ ノ共通部分ハ C ヲ含ム閉區間 $((\ell \wedge C) \sim (\ell' \wedge C), (\ell' \wedge C) \wedge (\ell \sim C))$ 即チ $(C \wedge (\ell' \sim \ell), C \sim (\ell' \sim \ell))$ デアル。

(補題 5.) 故ニ先ヅ $C \sim (\ell' \sim \ell)$ ガ $\ell \wedge C$, $\ell' \sim C$ ノ直交因子デアルコトヲ證明スル。

ℓ , $\ell' \sim \ell$ ハ共ニ a, b ノ直交因子デ

$\ell \geq \ell' \sim \ell \geq a$ デアルカラ、 $\ell' \sim \ell$ ハ ℓ ト a トノ直交因子デアル。(中野定理 5.8) 依ツテ $\ell' \sim \ell = p_{\ell, \ell' \sim \ell} a$ (宮崎定理 6.3) 故ニ $(\ell' \sim \ell) \sim C = (p_{\ell, \ell' \sim \ell} a) \sim C \leq p_{\ell, \ell' \sim \ell} C) \sim C$ 。
又 $p_{\ell, \ell' \sim \ell} C$ ハ C ト $\ell' \sim \ell$ トノ直交因子デアルカラ $(\ell' \sim \ell) \sim C \geq (p_{\ell, \ell' \sim \ell} C) \sim C$ 。従ツテ $(\ell' \sim \ell) \sim C = (p_{\ell, \ell' \sim \ell} C) \sim C$ 。

コレヨリ $(\ell \wedge e) \vee c$ は ℓ と c とノ直交因子トナリ、從ツテ $\ell \wedge c, \ell \vee c$ ノ直交因子トナル、同様 $= c \wedge (\ell \vee e)$ も $\ell \wedge c, \ell \vee c$ ノ直交因子トナル。

次 $= \{c \wedge (\ell \vee e), c \vee (\ell \wedge e)\}$ が $\{\ell \wedge c, \ell \vee c\}$ ノ辺區間デナイトスレバ補題 2ニ依リ

$$c \wedge (\ell \vee e) = \ell \wedge c, \quad c \vee (\ell \wedge e) = \ell \vee c.$$

コレヨリ $c \wedge e \leq \ell \leq c \vee e$ ヲ得ル、從ツテ 中野定理 3.15 ヲリ

$$Pa(c \wedge e) \ell \leq Pa \ell b \leq Pa(c \vee e) b$$

ヲ得ル、然ル $= Pa(c \wedge e) b = e, Pa \ell b = \ell$

ヨリ $e \leq \ell$ トナル。同様 -

$$Pa(c \wedge e) a \leq Pa \ell a \leq Pa(c \vee e) a$$

ヨリ $\ell \leq e$ トナルカラ $\ell = e$ トナリ假設ニ反スル、故 $= \{c \wedge (\ell \vee e), c \vee (\ell \wedge e)\}$ は $\{\ell \wedge c, \ell \vee c\}$ ノ

辺區間デアラネバナラナイ。

次ニ條件 4 ノ成立スルコトヲ證明スル、

$\{a, b\}$ ニ屬スル任意ノ元 d ニ對シテ

$$Pa(Pc, c \wedge d) b = e$$

ト置ケバ d は $\{\ell \wedge c, \ell \vee c\}$ ニ含マレル。

以下コレヲ證明スル。

ℓ が $\{a, b\}$ ノ端元デアルコトハ明カデアル。

中野定理 3.10 後半ヨリ $b, c \geq a$ = 注意シテ

$$\begin{aligned} \ell \wedge c &= \{Pa(Pc, c \wedge d) b\} \wedge c = Pa(Pc, c \wedge d) (b \wedge c) \\ &= Pa(Pc, c \wedge d) c = Pc, c \wedge d a. \end{aligned}$$

$$c \sim d = p_{c, c \sim d} \geq p_{c, c \sim d} a = e \sim c$$

$$\exists \text{リ} \quad d \geq e \sim c$$

$$\text{同様} = p_{e, c \sim d} b = e \quad \text{ト置ケバ}$$

$$e \sim c = p_{e, c \sim d} b \quad \text{デ} \quad e \sim c \geq d \quad \text{トナル。}$$

$$\text{次} = e \sim c \geq e \sim c \quad \text{ヲ證明スル。其ノ爲ニ先ヅ}$$

$$e \sim c = b \in p_{e, c \sim d} b \quad \text{ナルコトヲ證スル。}$$

$$(b \in p_{e, c \sim d} b) \perp p_{e, c \sim d} a = e'$$

ト置ケバ $(b, p_{e, c \sim d} a, p_{e, c \sim d} b, e')$ デアル。 $p_{e, c \sim d} b$ ハ b ト c , b ト $c \sim d$ トノ直交因子デ $p_{e, c \sim d} a \in \mathcal{U}(a, c \sim d)$ デアルカラ、補題6ニ依リ $p_{e, c \sim d} b$ ハ b ト $p_{e, c \sim d} a$ トノ直交因子デアル。従ツテ宮崎定理3.4ヨリ $e' \in b$ ト $p_{e, c \sim d} a$ トノ直交因子デアル。従ツテ

$$(b, p_{e, c \sim d} a, p_{e, c \sim d} b, e')_k$$

$$\text{同様} = (a, p_{e, c \sim d} b, p_{e, c \sim d} a, m')_k$$

ト置ケルカラ宮崎定理3.8カラ

$(a, b, e', m')_k$ ト成リ。 e' ハ a ト b トノ直交因子デア
ル。

$$\text{次} = (b \in p_{e, c \sim d} b) \perp (c \sim d) \quad \text{デアリ}$$

$$p_{e, c \sim d} a \in \mathcal{U}(a, c \sim d) \quad \text{デアルコトカラ}$$

$$(b \in p_{e, c \sim d} b) \perp p_{e, c \sim d} a. \quad \text{更ニ}$$

$$c \in (a, b) = \text{注意スレバ}$$

$$b \in p_{e, c \sim d} b \quad \text{ハ} \quad \mathcal{U}\{c, (a \in p_{e, c \sim d} a)\}$$

ニ属スルコトガ分ル。依ツテ

$$|x|_{a \sim} |p_{e, c \sim d} a|_a = a$$

トスレバ

$$|x-a| \sim |P_{c,c-d} a - a| = c \quad (c)$$

ヲ得ルカラ、

$$|x-a| \sim |b - P_{c,c-d} b| = c \quad (c)$$

ガ成立スル。コレヨリ

$$|x-a| \sim |b - P_{c,c-d} b + P_{c,c-d} a - a| = c \quad (c)$$

$$\text{然ルニ} \quad l' = b - P_{c,c-d} b + P_{c,c-d} a \quad (c)$$

$$\text{ヨリ} \quad |x-a| \sim |l'-a| = c \quad (c)$$

$$\text{即チ} \quad |x|_a \sim |l'|_a = a \quad \text{ト成リ}$$

$$l' \in \mathcal{U}_{\{a, (P_{c,c-d} a)\}}$$

トナル、從ツテ補題7ヨリ

$$l' = l \quad \text{ガ得ラレル。}$$

$$P_{c,c-d} a = l, c. \quad b \in P_{c,c-d} b + \frac{1}{c} P_{c,c-d} a = l$$

$$\text{ヨリ} \quad b \in P_{c,c-d} b = l \sim c$$

ヲ得ル。而シテ $(c \sim d) \frac{1}{c} (c \sim d)$ デアルカラ、中野

定理 3.17 = 依リ

$$P_{c,c-d} b + \frac{1}{c} P_{c,c-d} b = P_{\frac{1}{c}(c-d+c-d)} b \subseteq b.$$

故ニ

$$b \in P_{c,c-d} b \subseteq P_{c,c-d} b$$

$$\text{即チ} \quad l \sim c \geq b \sim c.$$

以上ヨリ

$$l \sim c \geq d \geq l \sim c \quad \text{トナリ}$$

$$d \in (l \sim c, l \sim c)$$

- 以上 -