



Title	Hilbert空間ノ angular relation ニ就イテ
Author(s)	岩本, 秀行
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 264, p. 157-166
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75115
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1182 Hilbert 空間, angular relation = 就イテ

岩本 秀行 (東大)

n 次元 *euclidean vector space* $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ の間ノ角ヲ定義スルコトハ、相當厄介ナ問題ヲ含メデキテ、 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ ノ次元ガ一般デ、且之等ガ一般ナ位置ニアル場合ニハ、適当ナ定義ヲ与ヘルコトハ困難デアル。唯 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ ガ何レモ $n-1$ 次元又ハ一次元ノ場合或ハ何レカ一方ガ一次元ノ場合ニハ、 $\mathcal{H}$ ノ間ノ角ノ *cosine* ヲ定義スル事ガ出来テ、シカモ $\cos^2 \theta$ ヲ与ヘレバ $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ ノ相対的ナ位置ガ廻轉群ヲ除イテ一意的ニ定マル。ソユデ $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}$ ノ間ノ *invariant* トシテ、ドノ様ナモノヲ与ヘレバ ニツノ *subspace* ノ相対的ナ位置ヲ、廻轉群ヲ除イテ一意ニ定メルコトが出来ルカト云フ問題ガ起ル。(コノ様ナ *invariant* ノ中カラ、實際角計量ノ擴張ニ相当スルモノガ得テレルデアアル) コノデハ一般ニ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ ノ中ノニツノ *closed linear manifold* $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}$ ノ間ノ *Unitary invariant* ガ或ル *Hermit* 演算子 H ヲ用ヒテ得ラレルコトヲ證明シ、有元次元ノ空間ヘノ幾ツカノ應用ヲノベル。

1. $\mathcal{H}$ ヲ Hilbert 空間トシ、 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ ヲ $\mathcal{H}$ ノ中ノニツノ任意ノ *closed linear manifold* トスル。 $\mathcal{M}_1$ ノ任意ノ *vector* $\mathcal{P}$ ヲ $\mathcal{M}_2$ ヘ正射影シテ出来ル *vector*

ヲ更ニ $\mathcal{M}_1$ 上ノ正射影シテ出来ル vector ヲ得トスル。

ψ ヲ φ = 対応サセル変換 $\psi \rightarrow \varphi = H_1 \psi$ ヲ $\mathcal{M}_1$ 中デ考ヘレバ, H_1 ハ hermitisch デ、且 $0 \leq \|H_1\| \leq 1$ デアル。即チ H_1 ガ hermitisch タトイフコトハ、 $\mathcal{M}_1$ 中デハ H_1 ハ $P_{\mathcal{M}_1} P_{\mathcal{M}_2} P_{\mathcal{M}_1}$ ト一致スルコトカラ分リ、又 $0 \leq \|H_1\| \leq 1$ ナルコトガ容易ニ分リマス。

$\mathcal{M}_1$ 中ノ vector デ、 $\mathcal{M}_2$ 中ノ vector = 垂直ナモノ全体ヲ $\mathcal{M}_1'$, $\mathcal{M}_2$ 中ノ vector デ $\mathcal{M}_1$ 中ノ vector = 垂直ナモノ全体ヲ $\mathcal{M}_2'$ トスル。

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1' \oplus \mathcal{M}_1'', \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2' \oplus \mathcal{M}_2''$$

デ $\mathcal{M}_1'', \mathcal{M}_2''$ ヲ定義スル。

補題1 $\mathcal{M}_1$ 中ノ $\mathcal{M}_2$ 上ノ projection ハ $\mathcal{M}_2' = \mathcal{M}_2$ 中ノ $\mathcal{M}_1$ 上ノ projection ハ $\mathcal{M}_1'$ = 一致スル。

$\mathcal{M}_1' \ni \psi \rightarrow P_{\mathcal{M}_2} \psi$, $\mathcal{M}_1' \ni \text{vector}$ ト $\mathcal{M}_2' \ni \text{vector}$ トが一対一ニ対応スル、 $\mathcal{M}_2' \ni \psi \rightarrow P_{\mathcal{M}_1} \psi$ モ同様デアル。

$P_{\mathcal{M}_1}, P_{\mathcal{M}_2}, P_{\mathcal{M}_1}$ ヲ $\mathcal{M}_2$ 中ノ hermitisch operator ト考ヘテ之ヲ H_2 トスル、 H_1, H_2 中ノ spectralisation ヲ夫:

$$H_1 = \int_0^1 \lambda dE_1(\lambda), \quad H_2 = \int_0^1 \lambda dE_2(\lambda)$$

トスレバ

$$E_1(0) = \mathcal{M}_1', \quad E_2(0) = \mathcal{M}_2' \text{ デアル。 } E_1(\lambda),$$

$E_2(\lambda)$ 中ノ range ヲ夫: $\mathcal{M}_1 \lambda, \mathcal{M}_2 \lambda$ トスル。

補題2. $f(x)$ ヲ x 中ノ任意ノ polynomial トスレバ $P_{\mathcal{M}_2} f(H_1) \psi = f(H_2) P_{\mathcal{M}_2} \psi$ ($\psi \in \mathcal{M}_1'$) デアル。

証明 $f(x) = x^2$ の場合ヲヤレバヨイ。

$$\psi \in \mathcal{H}_1 \quad \text{ナラバ、} P_{\mathcal{H}_2} (P_{\mathcal{H}_1} P_{\mathcal{H}_2})^n \psi = (P_{\mathcal{H}_2} P_{\mathcal{H}_1})^n P_{\mathcal{H}_2} \psi$$

$$\text{即チ} \quad P_{\mathcal{H}_2} f(H_1) \psi = f(H_2) P_{\mathcal{H}_2} \psi$$

同様ニ $\eta \in \mathcal{H}_2$ ナラバ、 $P_{\mathcal{H}_1} f(H_2) \eta = f(H_1) P_{\mathcal{H}_1} \eta$
トナル。

補題3 $\mathcal{H}_1(\lambda) - \mathcal{H}_1(0)$, $\mathcal{H}_2(\lambda) - \mathcal{H}_2(0)$ ハ互ニ他ノ射影デアル。

証明 前ノ補題ニヨリ $0 \leq x \leq 1$ デ連続ナ任意ノ $f(x) =$
対シテ $P_{\mathcal{H}_2} f(H_1) = f(H_2) P_{\mathcal{H}_2}$ トナルコト、及ビ $P_{\mu}(x) = \max(x - \mu, 0)$ トオケバ $\mathcal{H}(\lambda)$ ハ $P_{\lambda}(H) \cdot \psi = 0$
ナル ψ 全体ト一致スルコトカラ分ル。

補題4. $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4$ ナラバ $\mathcal{H}_{1\lambda_2} \ominus \mathcal{H}_{1\lambda_1}$, $\mathcal{H}_{2\lambda_4} \ominus \mathcal{H}_{2\lambda_3}$, $\mathcal{H}_{1\lambda_2} \ominus \mathcal{H}_{1\lambda_1}$, $\mathcal{H}_{2\lambda_2} \ominus \mathcal{H}_{2\lambda_1}$ ハ互ニ垂直デアル。

証明 $\mathcal{H}_{1\lambda_2} \ominus \mathcal{H}_{1\lambda_1}$ ノ任意ノ vector ψ , $\mathcal{H}_{2\lambda_4} \ominus \mathcal{H}_{2\lambda_3}$ ノ任意ノ vector η フトル。 $P_{\mathcal{H}_2} \psi$ ハ $\mathcal{H}_{2\lambda_2} \ominus \mathcal{H}_{2\lambda_1}$ ノ vector デアルカラ $\mathcal{H}_{2\lambda_4} \ominus \mathcal{H}_{2\lambda_3}$ ノ任意ノ vector ニ垂直、從ツテ ψ ハ η ニ垂直デアル。

定理1 H フ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 全体デ定義サレタ $0 \leq \|H\| \leq 1$ ナル任意ノ hermitisch ナ operator トスル。然ラバ $\mathcal{H}$ フ含ム適當ノ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ ノ中ニ closed linear manifold $\mathcal{H}$ フツクリ $P_{\mathcal{H}_1} P_{\mathcal{H}} P_{\mathcal{H}_1}$ ガ $\mathcal{H}$ ノ中デハ H ト一致スル様ニスル事が

出来ル。

證明 H の spectralisation ヲ

$$H = \int_0^1 \lambda dE(\lambda)$$

トスル。區間 $(0, 1)$ ノ中ニ任意ニ $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1$ ナ $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ ヲトル。之デ $(0, 1)$ ノ π ノ partition π ガ定義サレル。今 $\pi_1, \pi_2, \dots$ ヲ段々細カクナツテ行ツテ、シカモ $\max(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \rightarrow 0$ ナル如キ partition ノ列トスル。夫ニ π_α ニツイテ

$$H_\alpha = \sum_i \lambda_i (E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1}))$$

ニヨリ $H_1, H_2, \dots$ ヲ定義スル。コノ λ_i ハ $\lambda_i \geq \lambda_{i-1}$ ナ任意ノ数デ、各 π_α ニツイテ適當ニ定義サレテキルモノトスル。

次ニ $H_1, H_2, \dots$ ニ對應シテ closed linear manifold $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ ヲ $\mathcal{H}$ ヲ含ム適當ノ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\gamma$ ノ中ニ次ノ如ク定義スル。

$\mathcal{H}$ ノ完全正規直交系ヲ $\psi_1, \psi_2, \dots$ トスル。新ラシク

$\eta_1, \eta_2, \dots$ ナル element ヲ導入シテスベテノ i, j 對シ $(\psi_i, \eta_j) = 0, (\eta_i, \eta_j) = \delta_{ij}$ ト定義スレバ $\psi_1, \psi_2, \dots, \eta_1, \eta_2, \dots$ ガ $\mathcal{H}$ ノ Hilbert 空間ヲ張ル。之ヲ

$\mathcal{H}_\gamma$ トスル、 $\mathcal{H}_\gamma$ ノ中デ $\eta_1, \eta_2, \dots$ ニヨツテ張ラレル closed linear manifold ヲ $\mathcal{H}_0$ トスル。又 $\psi_i \rightarrow \eta_i$ ($i=1, 2, \dots$) ハ $\mathcal{H}$ ヲ $\mathcal{H}_0$ ニ移ス一ツノ Unitary Mapping ヲ定義スル。之ヲ U_0 トスル。今 π_1 ヲ

$$\pi_1 \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = 1$$

トシ、 $M_{\lambda} \in M_{\lambda_i} \Rightarrow R_{\lambda_i}$ トスル。 R_{λ_i} / 中 = 正規直交系
ヲ作り之ヲ $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \dots$ トスル。 $U\psi_{ij} = \eta_{ij}^{(i)}$ トスル。ニ
ツノ vector $\psi_{ij}, \eta_{ij}^{(i)}$ ノキメル直角 中 = vector
 $\eta_{ij}^{(i)}$ フトリ $\cos(\psi_{ij}, \eta_{ij}^{(i)}) = \sqrt{\lambda_i}$ トナル様ニスル。コノ
様ナ $\eta_{ij}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots$) 全体ニヨツテ張ラレ
ル closed linear manifold ヲ $\mathcal{H}_1$ トスル。 ψ_{ij}
 $\rightarrow \eta_{ij}^{(i)}$ ハ M ヲ $\mathcal{H}_1$ へ移ス Unitary + mapping
ヲ定義スル、之ヲ U_1 トスル。サテ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_j$
及ビ $U_1, U_2, \dots, U_j$ ガ定義サレタモノトシテ之カラ
 $\mathcal{H}_{j+1}$ 及ビ U_{j+1} ヲ定義スル。即チ Π_j ヲ

$$\Pi_j \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = 1$$

トシ、 Π_{j+1} = 於テハ λ_i, λ_{i+1} ノ間 =

$$\lambda_i = \mu_i < \mu_{i+1} < \dots < \mu_{i+k} = \lambda_{i+1}$$

ナル partition ガ入ッタトスル。 $M_{\mu_{i+j}} \ominus M_{\mu_{i+j-1}}$ ヲ
 $R_{\mu_{i+j}}$ トシ、 $R_{\mu_{i+j}}$ / 完全正規直交系ヲ $\psi_{i+j,1}, \dots$ トス
ル。 $U^\alpha \psi_{i+j,k} = \eta_{i+j,k}^{(\alpha)}$ トシ、 $\psi_{i+j,k}$ ト $\eta_{i+j,k}^{(\alpha)}$ ノキ
メル角ノ中 = $\eta_{i+j,k}^{(\alpha+1)}$ ヲ $\cos(\psi_{i+j,k}, \eta_{i+j,k}^{(\alpha+1)}) = \sqrt{\mu_{i+j}}$ ナ
ル如クトル。コノ様ナ η 全体ノ張ル closed linear
manifold ヲ $\mathcal{H}_{\alpha+1}$ ト定義シ、 $\psi_{i+j,k} \rightarrow \eta_{i+j,k}^{(\alpha+1)}$ 係
 $U_{\alpha+1}$ ヲ定義スル。今 ψ ヲ M ノ任意ノ vector トシ
 $U^\alpha \psi = \eta^\alpha$ トスレバ

$$\|\eta^\alpha - \eta^{\alpha+\beta}\| \leq \varepsilon_\alpha \|\psi\|, \quad (\varepsilon_\alpha \rightarrow 0 (\alpha \rightarrow \infty))$$

従ツテ $\eta^1, \eta^2, \dots$ ハ Cauchy sequence ヲ作ルカ
ニ一定ノ η = 収斂スル。

$U\varphi = \eta$ トオケバコノ様ナ群全体ハ *closed linear manifold* ヲツクル。之ヲ $\mathcal{H}$ トスル。 U ハ $\mathcal{H}$ ヲ $\mathcal{H}$ へ移ス *Unitary mapping* ヲ定義スル。又 P_m, P_n ハ $\mathcal{H}$ ノ中デハ $H\alpha = -$ 一致シ、且之ガ $P_m, P_n =$ 收斂シ従ツテ P_m, P_n ガ $\mathcal{H}$ ノ中デハ H ト一致スルコトモ容易ニ證明サレル。従ツテ之デ定理1ノ證明ハ完全ニスンダ。

定理2. 定理1デ、 $\mathcal{H}$ ヲ含ム *Hilbert 空間* $\overline{\mathcal{H}}$ ノ中ニ *closed linear manifold* $\overline{\mathcal{H}}$ ガアツテ、 P_m, P_n ガ $\mathcal{H}$ ノ中デ H ト一致スルトスル然ラバ $\mathcal{H} \sim \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \sim \overline{\mathcal{H}}$ ナル如キ *isometric* ナ変換 I ガアツテ、 $I =$ ヨリ $\mathcal{H}$ ハ不変、且 $\mathcal{H} \sim \overline{\mathcal{H}}$ ニ對應スル。

證明. 補題1ニヨリ $\mathcal{H}$ 中デ $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}_0$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}_0$, $\overline{\mathcal{H}}$ 中デ $\mathcal{H} = \mathcal{H}'' \oplus \mathcal{H}_0'$, $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}_0'$ トスル。 $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ ハ $E(0)$ ノ *range* ナカラ $\mathcal{H}' = \mathcal{H}''$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0'$ デアル。一般性ヲ失フコトナク $\mathcal{H}' = \mathcal{H}' = \mathcal{H}' = 0$ ト假定スルコトガ出来ル。 φ ヲ $\mathcal{H}$ ノ任意ノ *vector* トスレバ 補題1ニヨリ $P_m \varphi = \psi$ ナル $\mathcal{H}$ ノ *vector* ψ , $P_m \overline{\varphi} = \psi$ ナル $\overline{\mathcal{H}}$ ノ *vector* $\overline{\psi}$ ガ唯一ツキマル。ソコデ $\psi \rightarrow \psi$, $\overline{\varphi} \rightarrow \overline{\psi}$ ナル変換ヲ考ヘレバ之デ $\mathcal{H} \sim \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \sim \overline{\mathcal{H}}$ ナル変換ガキマリ $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}$ デアル。之ガ *isometric* ナルコトヲ證明スル。

ψ, ψ' ヲ $\mathcal{H}$ ノ任意ノ *vector* トシ、 ψ' ナラ定マル $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}$ ノ *vector* ヲ夫々 φ, φ' トスレバ、

$$(\psi, \psi') = (\psi, P_m \psi') = (\psi, \psi') \quad \text{同様} = (\psi, \bar{\psi}) = (\psi, \psi')$$

$$\text{即ち} \quad (\psi, \psi) = (\psi, \bar{\psi})$$

又 ψ カラキマル $\psi, \bar{\psi}$ / vector ヲ夫々 $\psi, \bar{\psi}$ トスル、
 $\psi', \bar{\psi}'$ カラキマル、 $\psi', \bar{\psi}'$ / vector ヲ夫々 $\psi', \bar{\psi}'$ トスレバ $\psi'' = \bar{\psi}'' = H^{-1} \psi'$ 。

依ツテ

$$(\psi, \psi') = (\psi, H^{-1} \psi') = (P_m \psi, H^{-1} \psi') = (\psi, H^{-1} \psi') \\ \text{同様} = (\bar{\psi}, \bar{\psi}') = (\psi, H^{-1} \psi')$$

即チコノ對應ハ *isometric* デアル。

我々ハ更ニ円周上ノ点 - 間シ普通ノ順序ノ公理ガ成立ツトシ之ヲ用ヒトシマス、然ラバ $\mathcal{L}_w$ ハ順序ヅケラレタ可換体也ニ於ケル擬似幾何學トナリ $\mathcal{L}$ ノ元ハ $\mathcal{L}_w$ ノ二次曲線トナリマス。以下更ニ定理9ガ成立ツコトヲノベマス。
 定理9 $\mathcal{L}$ ハ *reel, pythagoreisch* デ $\mathcal{L}_w$ ハ $\mathcal{L}$ ノ上ノ n 次元 *euclid* 空間トナリ、 $\mathcal{L}$ ノ元ハ $\mathcal{L}_w$ ニ於ケル点、二点ノ対、円、球、……ノ全体トナル。
 $\mathcal{L}$ ノ元 H デ $H \leq A \leq I$ ナラバ $A = H$ 或ハ $A = I$ トナルモノヲ超球トイフコトニシマス。或ル超球 H ガアルトキ、 H ノ $\mathcal{L}_w$ ノ無究遠ノ超平面ニ關スル *pole* ヲ H ノ中心ト呼ビマス。

或ル超球 H ノ中心ガ S ナルトキ、 S ヲ含ム n 次元、 $n-1$ 次元、……ノ平面ノ列 $A: \mathcal{L}_w = \alpha. > \alpha_{n-1} > \alpha_{n-2} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 = S$ ヲトリマス。

α_i は α_{i-1} = ヨリニツノ部分 α_i', α_i'' = 分ケラレマス。

ソコデ α カラ次ノ半空間ノ列

$$A': \quad \alpha > \alpha'_{n-1} > \alpha'_{n-2} > \cdots > \alpha'_1 > \alpha_0 = S$$

が作ラレマス。

S ヲ起点トスル半直線 l ト超平面 π トが、 H ニ属シテ共轭ノトキ、 l ハ π ニ垂直デアルト云ヒ、 S ヲ起点トスル π ノ上ノ直線ハ l ニ垂直ダト云ヒマス。 S ヲ過ギルーツダケ次元ノ異ナル半面 α_i', α_{i-1}' ガアルトキ $\alpha_i' =$ 属シテキテ $\alpha_{i-1}' =$ 垂直ナ半直線ヲ唯一本引クコトが出来マス。勿論半直線 l ガ $\alpha_{i-1}' =$ 垂直ダトイフハ、 l ガ α_{i-1}' ノ上ノ S ヲ起点トスルスベテノ半直線ニ垂直ダト云フ意味デアリマス。之カラ或ル半空間ニ属スル直交系ヲ定義スルコトが出来マス。即チ S ヲ起点トスル互ニ垂直ナ n コノ半直線 l_1, l_2, l_n デ、 $l_n < \alpha$, $l_i < \alpha_i$, $l_i = \alpha_i$ 且 l_i, l_j ガ互ニ垂直トナル如キモノが唯一ツ存在シマス。

$$A': \quad \alpha > \alpha'_{n-1} > \cdots > \alpha'_0 = S$$

$$B': \quad \alpha > \beta'_{n-1} > \cdots > \beta'_0 = S$$

ヲ任意ノニツノ半空間ノ *kette* トシ、ソレニ属スル直交系ヲ $\{l_1, \dots, l_n\}, \{m_1, \dots, m_n\}, l_c$ ト H トノ交点ヲ S_i, m_i ト H トノ交点ヲ T_i トスルトキ $S_i \rightarrow T_i$, $S \rightarrow S$ ハーツノ *Affinität* デアリマス。

コノ様ナ *Affinität* 全体ヲ $\mathcal{G}$ トスレバ、 $\mathcal{G}$ ハ $\mathcal{L}_w$ ニ於テ S ヲ不変ニスル様ナ *Affin* 変換全体ノツクル群

α / 部分群トナリ、 $\mathcal{G}$ = ツイテハ *Freibeweglichkeit*
Postulat 等 / 條件が満足サレマス。 従ツテ $\mathcal{G}$ ハ或
 ル正值二次形式ヲ不変ニシ、 $\mathcal{L}_W$ ハ *euclid* 空間ト
 ナリマス。而シテコノ場合 $\mathcal{L}$ / 元が $\mathcal{L}_W$ / 意味ニ於ケル円、
 球…… / 全体トナルコトがⅢ等ヲ用ヒテ證明サレマス。

§ 3. $\mathcal{L}_W$ ハ *euclid* 空間ダカラ、ソノ中ノニツノ超
 球 K_1, K_2 ガ直交スルトイフコトが定義サレマス。シカ
 モ之ハ点 W / 位置ニ関セズ、 K_1, K_2 / ミデ確定シタ意
 味ヲモツテキマス。之ハ $\mathcal{L}_W$ / 中ノ任意ノ点 W' / 中
 トスル球ニ関シ、 $\mathcal{L}_W$ / ヲ反轉シテ出来ル裁何ガ、 $\mathcal{L}_{W'}$ / ト
 本質的ニ同じモノデアルノヲ分リマス。今 $\mathcal{L}$ / ノ擴大体デ
 ソノ正ノ元ガスベテ平方根ヲモツ様ナ体ノ中デ最小ノモ
 ノヲ $\mathcal{L}$ / トシ、 $\mathcal{L}^{\dagger} = (\mathcal{L}, \sqrt{\mathcal{L}})$ / トシマス。 $\mathcal{L}_W$ / 座標ノ体ヲ
 $\mathcal{L}_W^{\dagger}$ / ニ擴大スレバ、スベテノ球ガ0デナイ *meet* / ヲモツ空
 間ガ作ラレマス。之ヲ $\mathcal{L}^{\dagger}$ / トスレバ、コノ擴大ニハ W =
 無關係ノ意味ヲ与ヘルコトが出来マス。 $\mathcal{L}^{\dagger}$ / = 普通ノ
Darboux / 座標ガ導入サレマス。 $\mathcal{S}$ / ヲ $\mathcal{L}^{\dagger}$ / = 於ケル超
 球及ビ点ノ或ル集合トスルトキ $[\mathcal{S}]$ / ヲ以テ $\mathcal{S}$ / スベテノ
 元ニ直交スル様ナ球或ハ点全体ヲ表ハスコトニスレバ、
 $[\mathcal{S}] \supseteq \mathcal{S}$ 、 $[[\mathcal{S}]] = [\mathcal{S}]$ / デアリマス。 $\mathcal{L}^{\dagger} /$ / コノ超球或ハ
 点 $K_1, \dots, K_{n+1}$ / ガアルトキ $\mathcal{D}$ / ノ i = 対シテモ $K_i \notin [K_1, \dots,$
 $K_{i-1}, K_{i+1}, \dots, K_{n+1}]$ / ノトキ $K_1, \dots, K_{n+1}$ / ハ獨立デアル
 トイヒ、コノ様ハ $K_1, \dots, K_{n+1}$ / カラキマス。
 $\{K_1, \dots, K_{n+1}\}$ / ヲ $\mathcal{L}^{\dagger}$ / ノ n -element トイフコトニスレ

ば、之ヲ $\mathcal{L}^+$ が Veblen-Young の射影幾何ニナリ
 マス。K が超球或ハ点ナルトキ K = 直交スル球或ハ点全
 体ハコノ意味デ超平面トナリ、之ヲ $\widehat{K}$ トスレバ $K \rightarrow \widehat{K}$
 ナル対応ハ一ツノ射影的ナ、involutorial ナ対応ニナリ
 且ツ之ハ一ツノ二次曲面ニ関スル pole ト polar ノ対
 應トナリ、コノ二次曲面ハ $K \subset \widehat{K}$ ナル K 即チ $\mathcal{L}^+$ ノ点全
 体トナリマス。即チコノ射影幾何ヲ $PL(n+1, k)$ トカキ、
 齊次座標ヲ $(x_1, \dots, x_{n+2})$ トスレバ、 $\mathcal{L}^+$ ノ点ハ二次
 曲面

$$\sum_{\lambda, \mu} g_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu = 0$$

ヲ形成シマス。

$\mathcal{L}^+$ ヲ $\mathcal{L}^+$ = 移ス - 対 - ノ対応デ任意ノ二元ノ間ノ
 meet ト join ノ関係ヲカヘナイモノ、全体ヲ Möbius
 変換トイフコトニシマス。 k^+ ノ Automorphismen-
 gruppe ヲ $\mathcal{G}$ トスレバ、Möbius 変換ハ

$$(A, S): \sum_{\lambda, \mu} g_{\lambda\mu} a_\alpha^\lambda a_\beta^\mu = g_{\alpha\beta}^S, \quad S \in \mathcal{G}$$

ナル semi-linear transformation 全体カラ
 ナリマス。ニツノ球 x, y ノ内積 $(x, y) = \sum g_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu$
 ハ gauge - 変換ト k^+ ノ自己同型ヲ除イテキマリマス。

$$\overline{(x, y)} = \lambda(A, S) (x, y)^S$$

特ニ (A, e) ナル形ノ Möbius 変換全体ハ $\mathcal{L}_w^+$ ノ反轉ノミヨリ erzeugen
 サレル群ニ一致スルコトガ分リマス。ニツノ円ノナス角 $(x, y) = (x, y)^e / (xx)$
 (y, y) ハ Möbius 変換デ $\overline{(x, y)} = (x, y)^S$ ノ如ク変ジマス。

(1994.6.20)