



Title	球面微分1/2ナル函数ニ就テ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 264, p. 167-169
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75116
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

春 木 博

今、 $f(z)$ が $|z| \leq 1$ で一價正則ナル函数トシ、且ツ $|z|=1$ 上ノ任意ノ点 $z=z_0$ ニ於ケル球面微分 $\frac{|f'(z_0)|}{1+|f(z_0)|^2}$ が 常ニ、 $\frac{1}{2}$ ナリトスル。更ニ $f(z)$ = 條件 $f(1)=1$, $f(-1)=-1$ ナル條件ヲツケル。

此時 $f(z)$ ハ如何ナル函数トナルカ?

結果ハカ、ル函数ハ $f(z)=z$, $f(z)=\frac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}$ ($|\alpha|>1$)
 α ハ実数
 ナルニツノ函数ニ限ル。以下ニ之ヲ証明シヨウ。

(証明) 今 $f(1)(=1)$, $f(-1)(=-1)$ ノ w 平面上ノ像点ヲ夫々 A (1 ヲアラハス), B (-1 ヲアラハス) トシ, *Riemann* 球面上ノ像点ヲ夫々 A^* , B^* トシ, 更ニ z 平面上ノ半円 $z=e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) ノ w 平面上ノ像曲線ヲ C , 又 *Riemann* 球面上ノ像曲線ヲ K トスル。

次ニ $\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} d\theta$ ナル積分ヲ考ヘレバ (但シ $z=e^{i\theta}$)

假定ニヨリ $\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} d\theta = \frac{1}{2} \pi$ ($z=e^{i\theta}$)

然ルニ $\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} d\theta$ ハ *Riemann* 球面上

A^* (複素数 1 ヲアラハス), B^* (複素数 -1 ヲアラハス)

ヲ結ブ曲線ノ長さ $\ell(K)$ ヲ与ヘル。

シカモ K ハ球面上直径ノ両端 A^* , B^* ヲ結ブ曲線デア

ルカラ

$$K \text{ノ長さ} = \ell(K) \geq \frac{1}{2}\pi$$

等号が成立スルノハ大円ノ半分ノ弧即チ半円ノ時ニ限ルカラ
テ K ハ実ハ半円ナルコトが判ツタ。從ツテ又、 $\odot$ ハ A, B
ヲ通ル円ノ弧トナル。(必ズシモ半円トハナラナイ)

今度ハ Z 平面上実軸ノ下ノ半円, $Z = e^{i\theta}$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$)
ノ $f(Z)$ = ヨル *Riemann* 球面上及ビ W 平面上ノ写像曲
線ヲ考ヘレバ同様ニシテ、夫々半円, 円ノ弧トナル。假定
ヲ使ヘバ $|Z|=1$ 上デハ $f'(Z)$ キ 0 ナルコトが判ルカラ、
結局 $|Z|=1$ ノ $f(Z)$ = ヨル *Riemann* 球面上ノ写像
曲線ハ大円トナリ、周ハ一対一ニ對應スル。

從ツテ又、 $f(Z)$ = ヨル $|Z|=1$ ノ W 平面上ノ写像曲線
ハ、 A, B ヲ通ル円デアル。併シ之ハ必ズシモ單位円デハ
ナイ。

單位円デナイ時ハ之ヲ單位円ニスルタメ、 α ヲ $|\alpha| > 1$ ナ
ル適當ノ実数トスルトキ、*Riemann* 球面ノ廻轉 $\frac{1-i\alpha Z}{Z-i\alpha}$
ヲ行ヘバ單位円ニナホル。

次ニ議論ヲニツノ場合ニ別ケテ、進メヨウ。

(第一ノ場合) $f(Z)$ = ヨル $|Z|=1$ ノ W 平面上ノ像曲線
が始メカラ單位円ナルトキ

此ノ時ハ結局 $f(Z) = Z$ トナル。

(第二ノ場合) $f(Z)$ = ヨル $|Z|=1$ ノ W 平面ヘノ像曲線
が單位円デナイトキ。

此ノ時ハ変換 $g(z) = \frac{1-i\alpha f(z)}{f(z)-i\alpha}$ ($|\alpha| > 1$)
 α ハ実数

ニ依リ $|z|=1$, $g(z)$ = ヨル z ハ平面上ノ像曲線ハ單位
円トナル。

α ノ定メ方カラ容易ニ判ルヤウニ、 $f(z) \neq 0$ ナル故
 $g(z)$ ハ勿論 $|z| \leq 1$ デ正則デ、シカモ $|z|=1$ ナルトキハ
 $|g(z)|=1$ デアル。

之ヨリ結局 $g(z)=z$

即チ $f(z) = \frac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}$ (α ハ $|\alpha| > 1$ ナル実数)

勿論之ハ与ヘラレタ條件ニ満足スルカラ

結局求ムル函数ハ

$$f(z) = \frac{1+i\alpha z}{z+i\alpha} \quad (\alpha \text{ハ } |\alpha| > 1 \text{ナル実数})$$

ノ二ツニ限ルコトが判ツタ。

-(完)-