



Title	Finsler空間ニ於ケル平行ト定點通過
Author(s)	朝長, 康郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 264, p. 170-179
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75117
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1184 *Finsler* 空間ニ於ケル平行ト 定點通過

朝 長 康 郎

序. *Riemann* 空間ニ於ケル平行ト定點通過ノ問題ハ佐々木重夫, 矢野健太郎両博士ニヨツテ夫々異ル方法ヲ論ゼラレ面白イ結果ガ多數得ラレタ (佐々木重夫「ほろのみー」群ガ一点或ハ一方向ヲ不変ニスルリーマン空間ノ構造ニツイテ」日本数学物理学會誌、昭和17年7月号、

K. Yano. Sur le parallélisme et concurrence dans l'espace de Riemann 帝國學士院記事19(1943) p189~197.

矢野健太郎「リーマン空間ニ於ケル平行ト定點通過」日本中等教育数學會雜誌第二十五卷第一号 昭和18年2月)

筆者ハ矢野先生ノ方法ニ倣ツテ同ジ問題ヲ *Finsler* 空間デ取扱ツテ見タ。

§1 *Finsler* 空間ト *Cartan* ノ接続⁽¹⁾

n 次元 *Finsler* 空間 F_n トハ曲線 $x^\lambda = x^\lambda(t)$ ($\lambda=1, 2, \dots, n$) ノ長サガ

$$(1.1) \quad S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x, x') dt$$

デアタヘラレルヤウナ (x^λ, x'^λ) ノ集合体デ $\mathcal{L}(x, x')$ ハ

x'^λ ニ關シテ1次ノ齊次函數トスル。

$$(1.2) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 \quad \text{トイケバ}$$

⁽¹⁾ E. Cartan *Les espaces de Finsler*.

$$(1.3) \quad g_{\lambda\mu} = \partial^2 \mathcal{F} / \partial x'^\lambda \partial x'^\mu$$

ト書ケル。 $g_{\lambda\mu}$ カラ共軛テンソル $g^{\lambda\mu}$ が定義サレル。

$$(1.4) \quad g_{\lambda\mu} g^{\lambda\sigma} = \delta_\mu^\sigma$$

又

$$(1.5) \quad \mathcal{L}^2 = g_{\lambda\mu} x'^\lambda x'^\mu$$

$$(1.6) \quad C_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial g_{\lambda\mu} / \partial x'^\nu, \quad C_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\pi} C_{\pi\mu\nu}$$

ナル テンソルハ $g_{\lambda\mu}$ ガ $x' = 0$ 次ノ齊次函数デアルカラ

$$(1.7) \quad C_{\lambda\mu\nu} x'^\nu = 0 \quad \text{トナル。}$$

$$(1.8) \quad A_{\lambda\mu\nu} = \mathcal{L} C_{\lambda\mu\nu} \quad A_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\sigma} A_{\mu\nu\sigma}$$

デ定義サレタ A , ハ $x', 0$ 次ノ齊次函数デアル。

$$(1.9) \quad 2G_\mu = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} x'^\lambda - \frac{2\mathcal{F}}{\partial x'^\mu}, \quad G^\lambda = g^{\lambda\mu} G_\mu$$

$$(1.10) \quad \overset{x}{\Gamma}_{\mu\nu,\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\pi}}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\pi}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^\pi} \right) - C_{\mu\pi\sigma} \frac{\partial G^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

$$- C_{\nu\pi\sigma} \frac{\partial G^\sigma}{\partial x'^\mu} + C_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial G^\sigma}{\partial x'^\pi}$$

$$\overset{x}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\pi} \overset{x}{\Gamma}_{\mu\nu,\pi}$$

ノヤウニ定義スルト $\overset{x}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ ハ $x', 0$ 次ノ齊次函数デ下ノ指標ニツイテ対稱デ座標ノ変換ニ際シクリストッフエルノ記号ノヤウニ変換ヲ受ケル。又次ノヤウニ関係ガアル。

$$(1.11) \quad \overset{x}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda x'^\nu = \partial G^\lambda / \partial x'^\mu$$

$$(1.12) \quad l^\lambda = x'^\lambda / \mathcal{L}(x, x') \quad \text{トオケバ}$$

$$(1.13) \quad \tilde{\omega}^\lambda = dl^\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial G^\lambda}{\partial x'^\pi} dx'^\pi = \tilde{\alpha}^\lambda + \overset{x}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda l^\mu \alpha x'^\nu$$

ナル $\tilde{\omega}^\lambda$ ハベクトル性ヲ有スルパツフ形式デアル。

F_μ ノ一要素 (x'^λ, x'^λ) ノ近傍ハ (1.5) カラ見ルト計量ガ

$$(1.14) \quad dS^2 = g_{\lambda\mu}(x, x') dx^\lambda dx^\mu$$

デアタヘラレルヤウナ n 次元ゆーくりつど空間ト考ヘラレル。故ニ F_n ノ各点ヲ M デ表シ、ゆーくりつど空間ト見做サレタ点 M ノ近傍ニ M ノ微小移動 dM ガ

$$(1.15) \quad dM = \mathcal{C}_\lambda dx^\lambda$$

デ表ハサレルヤウナ n 個ノ一次独立ナヴエクトル $\mathcal{C}_\lambda$ (之ヲ M ニ於ケル自然標構ト呼ビ x^λ ニ関係スルコトニ注意) ヲトルト $dS^2 = dM \cdot dM$ ヨリ

$$(1.16) \quad \mathcal{C}_\mu \cdot \mathcal{C}_\nu = \dot{g}_{\mu\nu}$$

デナケレバナラナイ。 $M + dM$ ノ近傍モ又ゆーくりつど空間ト見做サレルカラ M ノ近傍、ゆーくりつど空間 (M ニ於ケル切ゆーくりつど空間) トノ間ニ對應ヲツケルコトガ出来ル。ソレニハ $\mathcal{C}_\lambda$ ト $M + dM$ ニ於ケル自然標構 $\mathcal{C}_\lambda + d\mathcal{C}_\lambda$ トノ関係ヲ規定スレバヨイ。之ヲ *Cartan* ニ従ツテ次ノヤウニ決メル。

$$(1.17) \quad d\mathcal{C}_\mu = (\dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda dx^\nu + A_{\mu\nu}^\lambda \omega^\nu) \mathcal{C}_\lambda$$

(1.15) 及 (1.17) ニヨリ F_n ノ中ノ一ツノ曲線ニ沿ツテ切ゆーくりつど空間ヲ次々ニ重ねテ之ヲ全部同一ノゆーくりつど空間内ニ展開スルコトが出来ル。

勿論、ソノ曲線ニ沿ツテ x^λ モ連続的ニ変化シテナケレバナラナイ。

但シ x^λ ハ考ヘル曲線ノ dx^λ/dt トハ関係ガナイ。

§2. 平行ヴエクトル場及定点通過ヴエクトル場

F_n ヲ一ツノヴエクトル v^λ (簡單ノ場ニ v^λ ハ x' ニ関係ナク、

ス文ノ函数トスル)ヲ切ゆーくりつど空間デ見ルト ψ^λ
 $\mathcal{C}_\lambda$ デアツテ $\mathcal{C}_\lambda$ ハ x^λ =関係スルカラ x^λ ヲ ψ^λ ソノモ
 ノニ選ブト $\mathcal{C}_\lambda$ モス文デ決マル。

ユノヤウナヴェクトル場ヲ或ル曲線 $x^\lambda = x^\lambda(t)$ =沿ツテ δ
 ノ意味デ展開シタトキ点 M =於ケル切ゆーくりつど空間
 内ニ現レルソレ等ノ像ガ常ニ互ニ平行ダト謂フノナラ、

(1.7)ノ関係ニ注意スレバ

$$\frac{d}{dt}(\psi^\lambda \mathcal{C}_\lambda) = \left(\frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \psi^\mu \right) \frac{dx^\nu}{dt} \mathcal{C}_\lambda = 0$$

デナケレバナラナイ。即チ

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x, \psi) \psi^\mu \right) \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

如何ナル曲線デモト云フノナラ ψ^λ ハ次ノ関係ヲ満足シ
 ナケレバナラヌ。

$$(2.2) \quad \frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x, \psi) \psi^\mu = 0$$

逆ニ(2.2)ヲ満足スル ψ^λ カラ $\psi^\lambda \mathcal{C}_\lambda(x, \psi)$ ヲ造レバ、之
 ハ F_n 内ノ如何ナル曲線ニ沿ツテ切ゆーくりつど空間内
 ニ展開シテモ常ニ平行ナヴェクトルヲ与ヘル。定点通過ノ
 場合ハ切ゆーくりつど空間内ノ $M + \psi^\lambda \mathcal{C}_\lambda$ ナル点ガ動カ
 ナイノダカラ

$$\frac{d}{dt}(M + \psi^\lambda \mathcal{C}_\lambda) = \left\{ \frac{dx^\lambda}{dt} + \left(\frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x, \psi) \psi^\mu \right) \frac{dx^\nu}{dt} \right\} \mathcal{C}_\lambda = 0$$

即チ

$$(2.3) \quad \left(\delta_\nu^\lambda + \frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x, \psi) \psi^\mu \right) \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

如何ナル曲線 = 沿ッテモト云フノナラ

$$(2.4) \quad \delta_\nu^\lambda + \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \sqrt{\mu\nu}^\lambda(x, v) v^\mu = 0$$

逆 = (2.4) ヲ満足スル v^λ カラ造ツタヴエクトル v^λ
 $\mathcal{C}_\lambda(x, v)$ ハ F_n ノ如何ナル曲線 = 沿ッテ切ゆーくりつど、
 空間内 = 展開シテモ定点ヲ通ル。又平行ノ場合デモ定点
 通過ノ場合デモ v^λ ヲ切線トスル曲線ガ測地線 $dl^\lambda/ds +$
 $G^\lambda(x, L) = 0$, (s ハ 曲線ノ弧長) トナルコトガ容易ニ證
 明サレル。本節デ述べタヤウナ意味ノ平行, 定点通過ヲ
 夫々「狭義ノ平行」, 「狭義ノ定点通過」ト呼ブコトニスレ
 バ

定理. n 次元ノ Finsler 空間ガーツノ狭義ノ平行及定
 点通過ヴエクトル場ヲ許容スル爲ノ必要充分條件ハ夫々

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \sqrt{\mu\nu}^\lambda(x, v) v^\mu = 0$$

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \sqrt{\mu\nu}^\lambda(x, v) v^\mu + \delta_\nu^\lambda = 0$$

ヲ満足スルヴエクトル場 $v^\lambda = v^\lambda(x)$ ガ存在スルコトデア
 ル。 ガ得ラレル。

§3 超曲面上ニ誘導サレタ接続

F_n ノ中ニソノパラメーター表示ガ $x^\lambda = x^\lambda(y^i, \dots, y^{n-1})$
 デアタヘラレルヤウナ超曲面 V_{n-1} ヲトル。 $\partial x^\lambda / \partial y^i = E_{ij}^\lambda$,
 $\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^i \partial y^j} = E_{ij}^\lambda$ ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$) ノヤウニ書クコトニ
 スル。 V_{n-1} ノ法線ヴエクトル n^λ ハ transversal 1 條
 件カラ次ノヤウニ決定サレル。

$$(3.1) \quad g_{\lambda\mu}(x, n) n^\lambda E_{ij}^\mu = 0, \quad g_{\lambda\mu}(x, n) n^\lambda n^\mu = 1$$

$$\text{トスルト} \quad t_\lambda = g_{\lambda\sigma}(x, n) n^\sigma$$

$$g_{ij} = g_{\lambda\mu}(x, n) \varepsilon_i^\lambda \varepsilon_j^\mu, \quad g^{is} g_{sj} = \delta_j^i$$

$$\varepsilon_\lambda^i = g^{ij} g_{\lambda\mu}(x, n) \varepsilon_j^\mu, \quad \text{マウニシテ } t_\lambda, \varepsilon_\lambda^i, g_{ij}, g^{ij} \text{ が}$$

導カレルコトハ Riemann 空間ノ場合ト同ジデ

$$\varepsilon_\lambda^i \varepsilon_i^\sigma = \delta_\lambda^\sigma - n^\sigma t_\lambda$$

ナル関係ガアル。(3.1)ヲ V_{n-1} ニ沿ツテ x' ヲ n^λ ト

シテ共変微分スレバ

$$(3.2) \quad t_\lambda D \varepsilon_i^\lambda = H_{ij} dy^j$$

$$(3.3) \quad D n^\lambda = -\varepsilon_i^\lambda H_{ij} dy^j = \left(\frac{\partial n^\lambda}{\partial y^j} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda n^\mu \varepsilon_j^\nu \right) dy^j$$

(茲ニ $H_{ij} = g^{ak} H_{aj} H_{ik}$)ノマウナ公式ヲ得ル。今後用ヒラレル

x' ヲ含ム量ハ凡テ x' ヲ n^λ デ置き換ヘタモノトスル。

X^λ ヲ V_{n-1} ニ属スルベクトル即チ $X^\lambda = \varepsilon_i^\lambda X^i$ ト書ケルト

$$(3.4) \quad D X^i = \varepsilon_\lambda^i D X^\lambda$$

ト定義スルコトニヨリ V_{n-1} 上ニツノ接続ガ誘導サレル

右辺ノ D ハ勿論 V_{n-1} ニ沿フ微分デアル。

$$n^\lambda A_{\lambda\mu\nu} = 0 \quad \text{即チ } t_\lambda A_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad \text{ナルヲ以テ}$$

$$A_{\alpha\beta}^\lambda \varepsilon_i^\alpha \varepsilon_j^\beta = \varepsilon_s^\lambda A_{ij}^s, \quad \text{マウナ } A_{ij}^s \text{ が存在スル。}$$

$$D X^\lambda = \left(\frac{\partial X^\lambda}{\partial y^i} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X^\mu \varepsilon_i^\nu \right) dy^i + A_{\mu\nu}^\lambda X^\mu D n^\lambda$$

$$= \left\{ \varepsilon_i^\lambda \frac{\partial X^i}{\partial y^k} + \left(\varepsilon_{jk}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \varepsilon_j^\alpha \varepsilon_k^\beta - \varepsilon_s^\lambda A_{jm}^s H_k^m \right) X^j \right\} dy^k$$

デアルカラ次ノ公式ヲ得ル。

$$(3.5) \quad D X^i = d X^i + \Gamma_{jk}^i X^j dy^k$$

$$(3.6) \quad \Gamma_{jk}^i = \varepsilon_\lambda^i \left(\varepsilon_{jk}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \varepsilon_j^\alpha \varepsilon_k^\beta \right) - A_{jm}^i H_k^m$$

茲 = 表レタ $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ ハ $j, k =$ 就テ必シモ對稱デナイ。

$$(3.7) \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{kj}^i = A_{km}^i H_j^m - A_{jm}^i H_k^m$$

他方 g_{ij} カラ造ツタくりすといふえる記号 $\{\tilde{\Gamma}_{jk}^i\}$ ヲ計算スル。

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \xi_k^\gamma \xi_i^\alpha \xi_j^\beta + 2C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial n^\gamma}{\partial y^k} \xi_i^\alpha \xi_j^\beta + g_{\alpha\beta} \xi_i^\alpha \xi_{jk}^\beta + g_{\alpha\beta} \xi_{ik}^\alpha \xi_j^\beta$$

$$\begin{aligned} [ij, k] &= [\alpha\beta, \gamma] \xi_i^\alpha \xi_j^\beta \xi_k^\gamma + g_{\alpha\beta} \xi_k^\beta \xi_{ij}^\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial n^\alpha}{\partial y^i} \xi_j^\beta \xi_k^\gamma \\ &\quad + C_{\alpha\beta\gamma} \xi_i^\alpha \xi_k^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial y^j} - C_{\alpha\beta\gamma} \xi_i^\alpha \xi_j^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial y^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\alpha\beta, \gamma] \xi_i^\alpha \xi_j^\beta \xi_k^\gamma + g_{\alpha\gamma} \xi_{ij}^\alpha \xi_k^\gamma - C_{\gamma\beta\pi} \xi_k^\gamma \xi_j^\beta (\xi_i^\pi H_\pi^5 + \frac{\partial G^\pi}{\partial x^\alpha} \xi_i^\alpha) \\ &\quad - C_{\beta\gamma\pi} \xi_k^\gamma \xi_i^\beta (\xi_j^\pi H_\pi^5 + \frac{\partial G^\pi}{\partial x^\alpha} \xi_j^\alpha) \\ &\quad + C_{\alpha\beta\pi} \xi_i^\alpha \xi_j^\beta (\xi_k^\pi H_\pi^5 + \frac{\partial G^\pi}{\partial x^\alpha} \xi_k^\alpha) \end{aligned}$$

$$(3.8) \quad \left\{ \tilde{\Gamma}_{jk}^i \right\} = \xi_j^\beta (\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^i \xi_k^\alpha + \xi_{ij}^\alpha) - A_{im}^i H_j^m - A_{jm}^i H_i^m + A_{ijm} H^m$$

$$\text{茲} = H^{mk} = g^{ak} H_a^m \quad \text{トス。}$$

(3.6) ト (3.8) カラ $\tilde{\Gamma}$ ト $\{ \}$ トノ關係ガ分ル。

$$(3.9) \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \left\{ \tilde{\Gamma}_{jk}^i \right\} + A_{km}^i H_j^m - A_{jm}^i H_k^m$$

$$\text{又 } D\xi_i^\lambda = (\xi_{ik}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\pi\sigma}^\lambda \xi_i^\sigma \xi_k^\pi) dy^k + A_{\pi\sigma}^\lambda \xi_i^\sigma Dn^\pi \quad \text{カラ}$$

$$(3.10) \quad H_{ij} = t_\lambda (\xi_{ij}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \xi_i^\alpha \xi_j^\beta)$$

從ツテ次ノ公式ヲ得ル。

$$(3.11) \quad DX^\lambda = \xi_i^\lambda DX^i + n^\lambda H_{ij} X^i dy^j$$

到ル所 $H_{ij} = 0$ ナル V_{n-1} ヲ全測地的超曲面ト呼ブナラバ

全測地的超面ニ切スルーツノヴェクトルヲ外ノ空間 F_n ニ於

テ曲面ニ沿ッテ平行移動スレバ、結果ハ猶曲面ニ切シテ
居リシカモ曲面ニ於テモ平行デアルトイフ定理ガ成立ス
ル。

到ル所 $H_{ij} = \rho g_{ij}$ ナル V_{n-1} ヲ全脐超曲面ト呼ブコトニス
レバ (殊ニ ρ ガ常数ナル場合ヲ固有全脐超曲面ト呼ブ)
全測地的 V_{n-1} ニ沿ッテハ法線ベクトルガ狭義ノ平行ニ動
キ固有全脐 V_{n-1} ニ沿ッテハ法線ベクトルガ狭義ノ定点通
過ヲシテキル コトガ (3.3) カラ分ル、即チ後ノ場合ハ

$$H_{ij}^i = \delta_j^i \rho \quad \rho = \text{定数デアルカラ}$$

$$Dn^\lambda = -\rho \xi_i^{\lambda} dy^i = -\rho dx^\lambda$$

$$D(n^\lambda / \rho) + dx^\lambda = 0$$

即チ $\frac{1}{\rho} n^\lambda$ ナルベクトルノ端ガ定点トナツテキル。

$\frac{1}{\rho}$ ヲ固有全脐超曲面ノ半径ト呼ブコトニスル。

§4 狭義ノ平行及定点通過ベクトル場ヲ許容スル F_n ノ
構造。 狭義ノ平行ベクトル場 v^λ ガ存在スルトキ

$g_{\lambda\mu}(x, v) v^\lambda = v_\mu$ トオクト $g_{\lambda\mu}$ ノ絶対微分ハ0デア
ルカラ (2.2) カラ

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \overset{*}{f}_{\lambda\nu}^\sigma (x, v) v_\sigma = 0$$

コノデアルモノヲ入レ替ヘテ相減ズレバ $\overset{*}{f}_{\lambda\nu}^\sigma = \overset{*}{f}_{\nu\lambda}^\sigma$ デアル
カラ、

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\lambda} = 0$$

即ち

$$(4.1) \quad v_\lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda}$$

ノヤウナ スカラー φ ガ存在スル。

(4.1)ハ $\varphi = \text{定数}$ ナル V_{n-1} ニ対シテ v^λ ガ §3ノ意味デ
垂直ナルコトヲ示ス。ユノ V_{n-1} ノ法線ベクトルヲ n^λ
トスルト n^λ ガ又狭義ノ平行ベクトル場ヲ造ルカラ

$$Dn^\lambda = 0, \quad \text{即ち} \quad H_{ij}^\lambda = 0 \quad \text{トナリ。}$$

V_{n-1} ハ全測地的超曲面ナルコトガ知レル。又狭義ノ定点
通過ベクトル場 v^λ ガ存在スルトキハ

$$g_{\lambda\mu}(x, v) v^\lambda = v_\mu \quad \text{トオクトキ (2.4) カラ}$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x, v) v_\sigma + g_{\lambda\nu}(x, v) = 0$$

ガ導カレ此ノ場合モ

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\lambda} = 0 \quad \text{即ち} \quad v_\lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda} \quad \text{ナル スカラー } \varphi$$

ガ存在スル。 $\varphi = \text{定数}$ ナル V_{n-1} ノ法線ベクトルヲ n^λ
トスレバ前ト同様ニ $v^\lambda = \rho n^\lambda$ ト書イテ之ヲ (2.3)ニ代
入スルト

$$dx^\lambda + n^\lambda d\rho + \rho Dn^\lambda = 0$$

$dx^\lambda = \xi_i^\lambda dy^i$, $Dn^\lambda = -\xi_j^\lambda H_{ij}^\lambda dy^j$ デアルカラ $V_{n-1} =$
沿ツテハ $d\rho = 0$, 即ち $\rho = \text{定数}$ 及ビ

$$H_{ij}^\lambda = \frac{1}{\rho} \delta_{ij}^\lambda$$

即チコノ V_{n-1} ハ固有全脐超曲面デアル。又 (3.9)ヨリ

$$\Gamma_{jk}^i = \{j_k^i\} \quad \text{トナルカラ} \quad V_{n-1} = \text{誘導サレタ接続ハ Riemann}$$

式トナル。逆 $= F_n$ 、中ニ其ノ直截曲線ガ測地線トナツテ
 キルヤウナ ∞' 、全測地的超曲面ノ群ガ存在スルトキハ、
 夫等ノ法線ノ方向ニ向フベクトルハ自身ノ方向ニハ勿論
 狭義ノ平行ニ動キ、ソレニ垂直ナ全測地的超曲面ニ沿ツ
 テモ又狭義ノ平行デアルカラ、 n 個ノ獨立ナ方向ニ狭義ノ
 平行デアル。従ツテ狭義ノ平行ベクトル場ヲ造ル。又 F_n
 ノ中ニ其ノ直截曲線ガ測地線トナツテキル ∞' ノ固有全
 脐超曲面ノ群ガ存在シ、ソレ等ノニツニハサマレタ測地
 線ノ部分ノ長サガ半径ノ差ニ等シイトキハ、夫等ノ法線
 ノ方向ニ向フベクトルハ自身ノ方向ニハ勿論狭義ノ定点
 通過デ、直交スル固有全脐曲面ニ沿ツテモ狭義ノ定点通
 過デ、ソノ定点ガ ∞ ノコレ等全脐超曲面ニ就テ同一点ト
 ナルカラ結局 n 個ノ獨立ナ方向ニ狭義ノ定点通過デ F_n
 中デ狭義ノ定点通過ベクトル場ヲ形成スル。

由テ次ノ定理ヲ得ル。

定理4-1 F_n ガーツノ狭義ノ平行ベクトル場ヲ許容スル
 爲メノ必要充分條件ハ F_n ガーツノ直截曲線ガ測地線トナ
 ルヤウナ ∞' 個ノ全測地的超曲面ノ群ヲ含ムコトデアル。

定理4-2 F_n ガーツノ狭義ノ定点通過ベクトル場ヲ許
 容スルタメノ必要充分條件ハ F_n ガ其ノ直截曲線ガ測地
 線トナリ、ソノ任意ニツニハサマレタ測地線ノ部分ノ長
 サガ両者ノ半径ノ差ニ等シイバウナ ∞' 個ノ固有全脐曲
 面ノ群ヲ含ムコトデアル。

—(終)—