



Title	或ル種ノ函數方程式ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 265, p. 183-188
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75119
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

§ 1. 拋物線ノ特徴付ケ

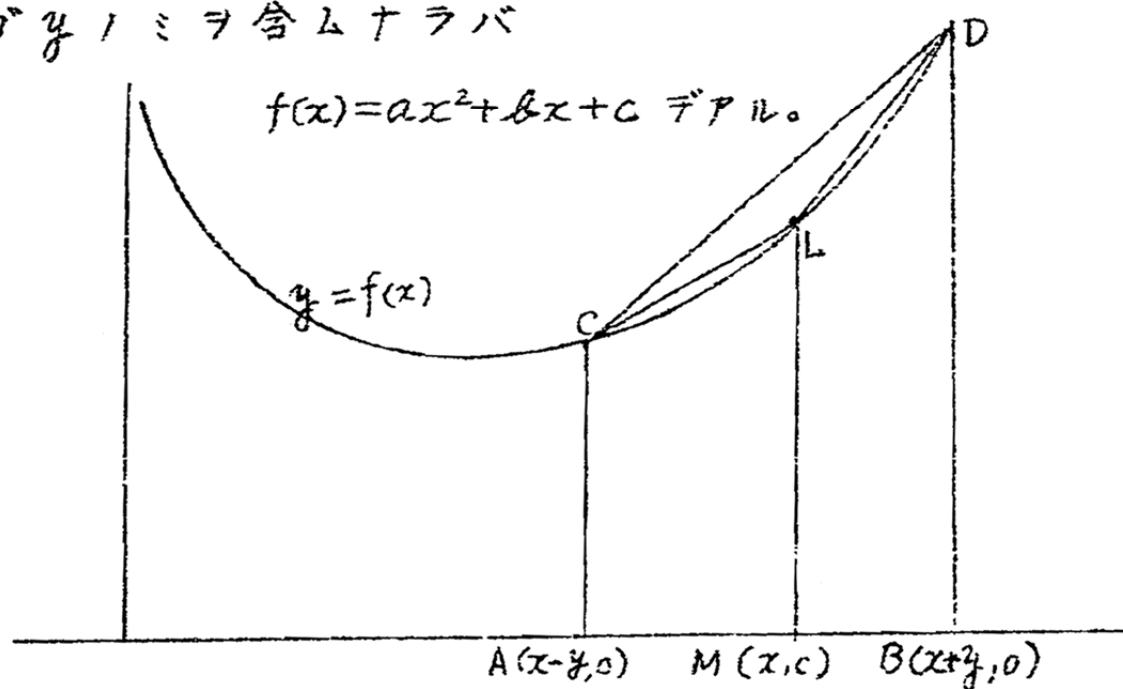
拋物線ノ特徴付ケトシテ、次ノ有名ナ定理ガアル。

定理 一ツノ平面曲線ノ平行弦ノ中点ノ軌跡ガ常ニ一定ノ直線ニ平行ナル直線トナレバ此曲線ハ拋物線デアル。(藤原先生、微積分学第一卷284P)

次ニ別ノ方法デ拋物線ヲ特徴付ケテ見ヨウ。

筆者ハ数物記事 Vol. 25, No. 7, July, 1943 ニテ次ノ定理ヲ証明シタ。

定理 1 $f(x)$ ガ $-\infty < x < +\infty$ デ定義サレタ一價實数値可測函数デ且ツ $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$ ガ y ノミヲ含ムナラバ



茲に a, b, c は実数ナリトスル。

此ノ定理ヲ利用スレバ、拋物線ノ特徴付ケトナル。

今変数軸 = 任意ノ二点 A, B ヲ取り、夫々ノ座標ヲ $A(x-y, 0), B(x+y, 0)$ トスル。 AB ノ中点ヲ M トスレバ、ソノ座標ハ $(x, 0)$ デアアル。

A, B, M ニ於テ、夫々変数軸ニ垂線ヲ立テ、之らニ $y = f(x)$ トノ交点ヲ夫々 C, D, L トスル。

スルト $\triangle CLD$ ノ面積ハ次式デ与ヘラレル。

$$\begin{aligned}\triangle CLD &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x-y & f(x-y) & 1 \\ x & f(x) & 1 \\ x+y & f(x+y) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} y \{ f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) \}\end{aligned}$$

故ニ **定理1**ノ幾何学的ナ意義ハ次ノヤウニナル

$y = f(x)$ ガ $-\infty < x < +\infty$ デ定義サレタ一價可測実数値函数デ図ニ於テ $\triangle CLD$ ノ面積ガ y ノミノ函数ナラバ、換言スレバ區間ノ長さ(ニ平行線 AC, BD ノ距離) $\overline{AB}$ ノミニ關係スルナラバ $y = f(x)$ ハ (y 軸ニ平行テ主軸ヲ持ツ) 拋物線ヲ表ス。(当然ノ注意デアアルガ $a = 0$ ノトキハ直線トナルカラ、直線ヲ含メテ云フコト = スル)

2. 複素数 z ノ絶對値 $|z|$ ノ特徴付ケ

筆者ハ本紙第257号1144(503P)ニ於テ $|Z|$ ヲ
特徴付ケタガ、次ニ別ナ方法デ $|Z|$ ヲ特徴付ケテ見ヨ
ウ。

定理2 $f(z)$ ガ複素数平面上 $|z| < +\infty$ デ定義サレ
ター價実数値函数トシ、且ツ

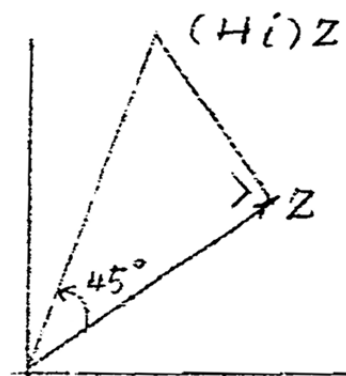
1° $f(z) - |z|$ ハ原点デ全微分可能

2° 任意ノ z ニ對シ $f\{(1+i)z\} = \sqrt{2} f(z)$

ヲ満足ナラバ $f(z) = |z|$ デアアル。

ユノ定理ノ幾何学的意味ハ図ヨ
リ明カデアラウ。

(証明) $f(z)$ ハ実数値ヲ取ル故
 $F(x, y) = f(z) - |z|$ トオケバ ($z =$
 $x + iy$) $F(x, y)$ ハ実数値函数
デ、假定2°ニ依リ、次ノ函数方程式ヲ満足サセル。



$$(1) \quad F(x-y, x+y) = \sqrt{2} F(x, y)$$

(1)ニ於テ $x=0, y=0$ トオケバ $F(0,0)=0$

又假定1°ニ依リ $F(x, y)$ ハ原点ニ於テ全微分可能ナル
故、(1)ヲ用キ簡單ナ計算ニ依リ

$$(2) \quad \begin{cases} F_x(0,0)=0 \\ F_y(0,0)=0 \end{cases}$$

$F(x, y)$ ハ $(0,0)$ デ全微分可能ナル故

$$F(x, y) = F(0,0) + x F_x(0,0) + y F_y(0,0) + \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2}$$

ト書ケル。茲ニ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon = 0$ デアル。

$F(0,0)=0$ ト (2) ヲ用キルコト = 依リ、結局

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

次ニ

$$(4) \quad g(x,y) \begin{cases} = \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ = 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ナルヤウ函数 $g(x,y)$ ヲ考ヘレバ (1), (4) = 依リ $(x,y) \neq (0,0)$ デアツテモ $(x,y) = (0,0)$ デアツテモ $g(x,y)$ ハ次ノ函数方程式ヲ満足サセル。

$$(5) \quad g(x-y, x+y) = g(x,y)$$

且ツ (3) = ヲリ

$$(6) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$$

(5) = 於テ、 x, y ノ代リニ夫々 $x-y, x+y$ トオケバ

$$g(-2y, 2x) = g(x-y, x+y)$$

上式ト (5) トヨリ

$$(7) \quad g(-2y, 2x) = g(x,y)$$

(7) ノ關係ヲ用キレバ

$$g(-4x, -4y) = g(-2y, 2x)$$

上式ト (7) ト = ヲリ

$$(8) \quad g(x,y) = g(-4x, -4y)$$

(8) / 関係ヲ用ケレバ

$$g(-4x, -4y) = g(16x, 16y)$$

上式ト(8)トニヨリ

$$g(x, y) = g(16x, 16y)$$

上式ニ於テ x, y / 代リニ夫々 $\frac{x}{16}, \frac{y}{16}$ トオケバ

$$g(x, y) = g\left(\frac{x}{16}, \frac{y}{16}\right)$$

之ヨリ、任意ノ自然数 n ニ対シ

$$g(x, y) = g\left(\frac{x}{16^n}, \frac{y}{16^n}\right)$$

ユ、デ、 $n \rightarrow +\infty$ ナラシムレバ (6)ニヨリ右辺 $\rightarrow 0$

トナルカラ $g(x, y) \equiv 0$

故ニ (4)ニヨリ $(x, y) \neq (0, 0)$ ナラバ $F(x, y) \equiv 0$

又 $F(0, 0) = 0$ ナル故 結局 $F(x, y) \equiv 0$

又定義ニヨリ $F(x, y) = f(z) - |z|$ ナル故

$$f(z) = |z| \quad (\text{証明了})$$

§ 3. 筆者ハ本紙第262号1170(94p-95p)ニテ
次ノ定理ヲ証明シタ。

定理 $f(x)$ ヲ $x > 0$ デ定義サレタ一價実数值函数

トスルトキ $f(ax) = f(x)$ ($a > 0$) ヲ $f(x)$ ガ

満足スルナラバ

$$f(x) = g(\log x)$$

デアル。茲ニ $g(x)$ ハ $-\infty < x < +\infty$ ニテ定義サレ

ター價實數値函数デ $\log \alpha$ ヲ週期トスル任意ノ週期函数ナリトスル。

之ヲ用キテ次ノ定理ヲ証明シヤウ。

定理 3. $f(x)$ ヲ $x > 0$ デ定義サレター價實數値函数トスルトキ $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ($\alpha > 0$) ナラバ

$$f(x) = xg(\log x)$$

デアル。茲ニ $g(x)$ ハ $-\infty < x < +\infty$ ニテ定義サレター價實數値函数デ $\log \alpha$ ヲ週期トスル任意ノ週期函数ナリトスル。

(証明) $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ トオケバ $F(x)$ ハ $x > 0$ デ定義サレター價實數値函数デ $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ナルコトカラ $F(x)$ ハ $x > 0$ デ $F(\alpha x) = F(x)$ ヲ充ス。

之カラ先ハ前定理ニ依レバヨイ。

(完)