



Title	對稱群ノ表現ニ就テ（Ⅰ）
Author(s)	大島, 勝
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 265, p. 215-244
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75125
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1192. 對稱群ノ表現ニ就テ (I)

大 島 勝 (高知高校)

對稱群 S_n ノ表現ニ就テハ $G. Frobenius$ 以來多數ノ人々特ニ $I. Schur$, $A. Young$ 及ビ $H. Weyl$ ニヨリ深ク研究サレテ色々ノ事實ガ明カニサレテナル。最近ニ至リ中山氏ハ所謂 *diagram* = *hook* ナル概念ヲ導入サレテ二三ノ重要ナル結果ヲ得タ⁽¹⁾。本稿ニ於テハ第二章ニ於テ *hook* = 関スル若干ノ性質ヲ述ベル、ソノ一部分ハ既ニ中山氏ノ得タレタモノデアル。

第二章ニ於テハ *hook* ヲ用ヒテ *diagram* ノ構造ヲ調ベル。次ニソノ應用トシテ第三章ニ於テ S_n ノ既約表現及ビ自己共軛既約表現ノ個數ヲ与ヘル *recurrence formula* ヲ導ク、第三章マデハ既ニ一昨年ノ数物年会デ発表セルモノデアル、最後ノ第四章デハ未ダ殆ンド手ノツケテナイ S_n ノ *modular* 表現ノ問題、特ニ中山氏ニヨリ提出サレタ既約表現ノ *block* へノ *distribution* ノ問題ヲ考究スル⁽²⁾。

1. *hook* ノ諸性質

§ 1. *Diagrams* 自然数 n ノ分割

$$1) \quad n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k > 0, \alpha_i \text{ハ整数}$$

ニ対応シテ

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k): \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ *****} \\ \alpha_2 \text{ ****} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_k \text{ **} \end{array}$$

ナル k 個ノ文字ノ配列ヲ考ヘ、コレヲ分割(1)ニ対応スル *diagram* ト稱スルコトハ良ク知ラレテナル。
Tハ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k = n$ リ一意約ニ決定サレル次ニ

$$(2) \quad \beta_i = \alpha_i + k - i$$

トオケバ

$$(3) \quad \sum_{i=1}^k \beta_i = n + \frac{1}{2} k(k-1), \quad \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_k > 0$$

又Tノ第 j -列ニ於ケル文字ノ個数 γ_j ヲ表セバ

$$(4) \quad \sum_{j=1}^k \gamma_j = n, \quad \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_k > 0, \quad (k = \alpha_1)$$

更ニ

$$(5) \quad \delta_j = \gamma_j + k - j, \quad (k = \alpha_1)$$

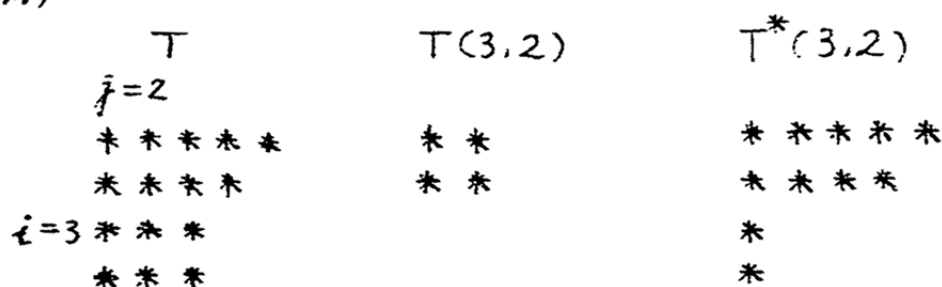
トオケバ

$$(6) \quad \sum_{j=1}^k \delta_j = n + \frac{1}{2} k(k-1), \quad \delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_k > 0$$

ヲ得ル、 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ 及ビ δ_j ヲ夫々Tノ α -数、 β -数、 γ -数及ビ δ -数トイフ。 γ -数が $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ ナル *diagram* ヲ $T(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ 又ハ $[\gamma_j]$ ヲ表ハス。

$T(\alpha_i) = \text{於テ } i \leq x, j \leq y \text{ ヲ満足スル } (x, y) \text{ ヲ座}$
標トスル文字ノナス diagram ヲ $T(i, j)$ デ表ハス。
 T ヨリ $T(i, j)$ ヲ取去ルコトニヨツテ得ラレル *dia-*
gram ヲ $T^*(i, j)$ デ表ハス。即チ T ハ $T(i, j)$ ト
 $T^*(i, j)$ ナルニツノ *diagram* ニ分解サレルワケデ
 アル。

(例)



$T(\alpha_i)$ ヲ *transpose* スルコトニヨリ各行ガ $\gamma_1, \gamma_2,$
 $\dots, \gamma_k$ 個ノ文字ヨリナル *diagram* ヲ得ル。コ
 レヲ *Frobenius* = 従ツテ T ノ共軛 *diagram* トイ
 ヒ $\tilde{T}$ デ表ハス。特ニ $T = \tilde{T}$ ナルトキハ T ヲ自己共軛
diagram トイフ。

§2. *Idookes* $T(\alpha_i) = \text{於テ } (i, j) \text{ ヲ } \alpha_i \geq j \text{ ヲ満足}$
 スルニ数トスレバ T ノ第 i 行ト第 j 列ハ交ハル、ソ
 ノ交点ノ座標ハ (i, j) デアル $x=i, y \geq j$, 又ハ
 $x \geq i, y=j$ ヲ満足スル (x, j) ヲ座標トスル文字ハ Γ
 字形ヲナスガ、コレヲ以後 T ノ (i, j) -hook H 又ハ
 單ニ T ノ hook H トイフ、 H = 於ケル文字ノ個数ヲ
 ヲノ長サ又垂直部分ノ長サヲ H ノ高サトイフ。長サ

g ナル hook ヲ g -hook ト書クコトニスル。)

n 個ノ文字ヨリナル diagram T ノ一ツノ hook ヲ H , ソノ長サヲ g トスル、今 H ヲ取去リ H ノ右方及ビ下方ニアル文字ヲ左方, 上方ヘト動カスコトニヨリ $(n-g)$ 個ノ文字ヨリナル diagram T' ヲ得ル、コノトキ $T' = T - H$ ト表ハス、 T ノニツノ hook ヲ H_1, H_2 トシソノ長サヲ夫々 g_1, g_2 トスル、尚 H_1, H_2 ノ座標ヲ夫々 $(i, j), (s, t)$ トシ $i \neq s, j \neq t$ トスル。 $T' = T - H_1$ トスレバ T' ハ H_2 ニヨリ決定サレル g_2 -hook H_2' ヲモツ、故ニ $T'' = (T - H_1) - H_2$ トスル、他方 $T^* = T - H_2$ ハ H_1 ニヨリ決定サレル g_1 -hook H_1^* ヲモツ $T^* - H_1^* = (T - H_2) - H_1^* = T^{**}$ トスレバ $T'' = T^{**}$ トナル

$$(7) \quad (T - H_1) - H_2' = (T - H_2) - H_1^*$$

T ノ hook H ノ長サヲ g トスル、 $g = g_1 + g_2$ ナルトキハ T ハ g_1 -hook H_1 カ又ハ g_2 -hook H_2 ヲモツ、前者ノ場合ハ $T - H_1$ ハ g_2 -hook H_2' ヲモツ

$$T - H = (T - H_1) - H_2'$$

後者ノ場合ハ $T - H_2$ ハ g_1 -hook H_1' ヲモツ

$$T - H = (T - H_2) - H_1'$$

トナル、從ツテ特ニ $g = r g'$ ナルトキハ H ハ r 個ノ g' -hook ニ分解サレル T ヨリ hook H ヲ取去ツテ T_1 ヲ得タトキ、我々ハ $T_1 = H$ ヲ添加可能デアルトイ

7. 以下長さが素数 p の倍数ナル $hook$ ノミヲ考ヘ
ルカラ T ガ p -hook ヲモタナイトキ、 T ヲ p -regular
デアルトイフ。

定理 1. n 個ノ文字ヨリナル p -regular diagram
ヲ $T(\alpha_i)$ トスル、各 $r=1, 2, \dots, p$ = 對シテ高サ
 r ノ p -hook H_r ヲ T = 添加出来ル、且ツ同一ノ r
= 對シテハ H_r ヲ添加シテ出来ル diagram ハ一
意的ニ決定サレル。

(証明) $n=0$ ナルトキハ定理ハ成立スルカラ、 n
ヨリ小ナルトキハ定理ハ成立スルト假定スル、從ツ
テ $T(2,1)$ ニツイテハ定理ハ成立スルカラ $T(2,1)$
= $T' - H_r$ トシ、 T' ノ α -数ヲ $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_l$ ト
スル、以下次ノ二ツノ場合ニ分ケテ考ヘル。

(i) $\alpha'_1 \leq \alpha_1$ ナルトキ: $\alpha'_1 \leq \alpha_1$ ナル故 T' ノ上方
ヘ $T^*(2,1)$ ヲ加ヘルコトニヨリ得ラレル diagram
ヲ T'' トスレバ明カニ $T = T'' - H_r$ ガ成立スル。

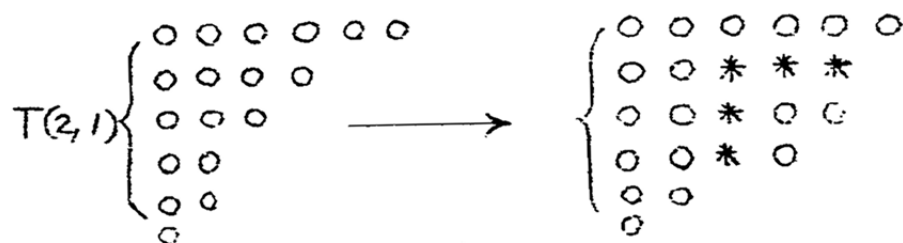
(ii) $\alpha'_1 > \alpha_1$ ナルトキ: $\alpha'_1 > \alpha_1$ ナル故 $\alpha'_1 \neq \alpha'_2$
從ツテ T' = 於ケル H_r ノ座標ハ $(1, j)$ トナル、 T' ノ
 r -数ヲ $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_m$ トスレバ $r = \gamma'_j > \gamma'_{j+1}$ ナ
ルトキハ $r < \gamma'_{j-1}$, $\gamma'_j > r$ ガ成立スル。但シ γ'_i ハ
 T ノ r -数デアル。從ツテ T ハ $(1, j)$ ナル位置ニ
 H_r ヲ添加可能、又 $r = \gamma'_j = \gamma'_{j+1} = \dots = \gamma'_{j+n} >$
 γ'_{j+n+1} ナルトキハ T ハ $(1, j+n)$ ナル位置ニ H_r ヲ

添加可能デアル。故ニ $T = H$ 各 $r = \tau$ イテ H_r ガ添
 加可能ナルコトガ分ツタ。次ニ添加ガ一意的ナルコ
 トヲ証明スルーツノ $r = \tau$ 対シ H_r ヲ添加シテニツノ
 $diagram T_1, T_2$ ヲ得タトスル。 H_r ノ座標ヲ夫
 々 $(i, j), (s, t)$ トスル。 $i = s, j = t$ ナルトキハ
 $T_1 = T_2$ 、故ニ $i \neq s, j \neq t$ ノ場合ヲ考へル、 $1 < i,$
 $1 < s$ ナルトキハ $T_1(2, 1) - H_r = T(2, 1), T_2(2, 1)$
 $- H_r = T(2, 1)$ 、故ニ帰納法ノ假定ニヨリ、 $T_1(2, 1)$
 $= T_2(2, 1)$ 従ツテ $T_1 = T_2$ 故ニ残サレタ場合ハ
 $i = 1$ 又ハ $s = 1$ ナルトキデアル $i = 1, 1 < s$ トスル。
 T_1 カラ (ii) ノ場合ノ逆ノ操作ニヨリ $T_1^* - H_r = T(2, 1)$
 ナル $diagram T_1^*$ ヲ得ル、ソノ α -数ヲ (α_i^*) トスレバ
 $\alpha_1 < \alpha_1^*$ ガ成立スル、他方 $1 < s$ ナル故 $T_2(2, 1) - H_r$
 $= T(2, 1)$ トナリ $T_2(2, 1)$ ノ α -数ヲ $(\alpha_i^{(2)})$ トスレバ $\alpha_1^{(2)}$
 $< \alpha_1$ ガ成立スル従ツテ $T_1^* \neq T_2(2, 1)$ トナリ $T(2, 1) = H_r$
 ヲ添加シテ相異なる $diagram$ ヲ得ルコト、ナル、コ
 レハ帰納法ノ假定ニ反ス、故ニ $i = 1$ ナルトキハ
 $s = 1$ トナリ $T_1 = T_2$ コレヲ定理ハ完全ニ証明サレタ。

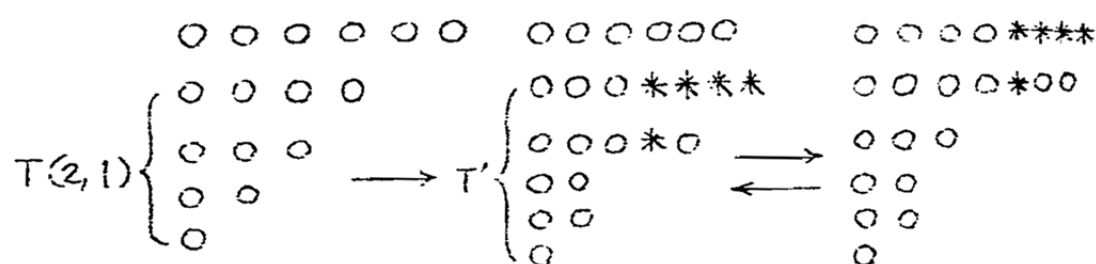
(例) $P = 5$

(i) ノ場合

T



(ii) 1 場合 T



$$T(2,1) = T' - H_2$$

定理 1 と同様 = シテ

定理 2 T が n 個ノ文字ヨリナル p -regular diagram トスル、各 $r = 1, 2, \dots, lp$ = 対シテ高サルノ lp -hook H_r ヲ T = 添加可能デアル、且ツ同一ノ r = 対シテハ H_r ヲ添加シテ出来ル diagram ハ一意的ニ決定サレル。

Lemma 1. diagram T ガ高サルノ p -hook H_r ヲモタナケレバ $T = H_r$ ヲ添加可能デアル、且ツ添加ハ一意的デアル。

(証明) 定理 1 と同様デアル。

Lemma 2 $T(\alpha_i)$ ガ高サルノ p -hook H_r ヲ l_i 個モテバ、 $T(\alpha_i) = H_r$ ヲ添加スルコトニヨリ $(l_i + 1)$ 個ノ相異なる diagram ヲ得ル。

(証明) $l_i = 0$ ナルトキハ Lemma 1 トナル、故ニ l_i ヨリ小ナルトキハ成立スルト假定スル、 l_i 個ノ H_r ノ中列ノ座標ノ最小ナルモノヲ H トシ、ソノ座標ヲ (i, j) トスル $T(1, j+1)$ ハ $(l_i - 1)$ 個ノ H_r ヲモテ、

$T(i+1, 1)$ は H_r をモタナシ、又 $T(i, j+1)$ の α -number
 は $\alpha_1 - j, \alpha_2 - j, \dots$ とナリ、特 $\alpha_i - j = p - r$ が
 成立スル帰納法ノ假定ニヨリ $T(i, j+1) = H_r$ を添加
 シテ各個ノ相異なる $diagram \Delta_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, l)$ を
 得ルガ Δ_λ ニ於ケル添加シタ H_r ノ座標ヲ $(\delta_i^{(\lambda)}, t^{(\lambda)})$ と
 スレド $\alpha_i - j = p - r$ ナル故 $\delta_i^{(\lambda)} \leq i (\lambda = 1, 2, \dots, l)$
 従ツテ Δ_λ ノ δ 数ヲ $(\delta_i^{(\lambda)})$ とスレバ $\delta_i^{(\lambda)} \leq \delta_j$ とナル
 但シ δ_j ハ T ノ第 j 列ノ文字ノ偶数デアル、故ニ Δ_λ
 ノ左方 $= T^*(i, j+1)$ を加ヘルコトニヨリ $T = H_r$ を
 添加シタ $diagram$ を各個得ル、同様ニ $T(i+1, 1)$
 ニツイテ考ヘ、 $T = H_r$ を添加シタ $diagram$ を一
 個得ル、コレヲ $(l+1)$ 個ノ相異なるコトハ明カデ
 アル。 $(l+1)$ 個以上ナシコトモ容易ニ分ル。

定理3 $diagram T$ ガ l 個ノ p -hook をモテ
 バ $T =$ 高サ $r (r = 1, 2, \dots, p)$ ノ p -hook を添加
 スルコトニヨリ $(p+l)$ 個ノ相異なる $diagram$ を得ル。

(証明) Lemma 2 ヨリ明カデアル。

2. $diagram$ ノ構造

§3. Normal hook p -regular $diagram$
 $T =$ 高サ r ノ l_r -hook H を添加シテ出来ル $dia-$
 $gram$ を T' とシ $T' =$ 於ケル H ノ座標ヲ (i, j) とス
 ル、 T' ハ §2 ニヨリ p -hook をモツガ、 p -hook
 ノ位置ニツイテハ次ノ三ツノ場合が考ヘラレル即チ

$T(i+1, 1)$ は H_r をモタナシ、又 $T(1, j+1)$ は α -number
 である $\alpha_1 - j, \alpha_2 - j, \dots$ とナリ、特 $\alpha_i - j = p - r$ が
 成立スル帰納法ノ假定ニヨリ $T(1, j+1) = H_r$ を添加
 シテ各個ノ相異なる $diagram \Delta_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, \ell)$ を
 得ルガ Δ_λ ニ於ケル添加シタ H_r ノ座標ヲ $(\delta_i^{(\lambda)}, t^{(\lambda)})$ と
 スレド $\alpha_i - j = p - r$ ナル故 $\delta_i^{(\lambda)} \leq i (\lambda = 1, 2, \dots, \ell)$
 従ツテ Δ_λ ノ δ 数ヲ $(\delta_i^{(\lambda)})$ とスレバ $\delta_i^{(\lambda)} \leq \delta_j$ とナル
 但シ δ_j ハ T ノ第 j 列ノ文字ノ偶数デアル、故ニ Δ_λ
 ノ左方 $= T^*(1, j+1)$ を加ヘルコトニヨリ $T = H_r$ を
 添加シタ $diagram$ を各個得ル、同様ニ $T(i+1, 1)$
 ニツイテ考ヘ、 $T = H_r$ を添加シタ $diagram$ を一
 個得ル、コレヲ $(\ell+1)$ 個ガ相異なるコトハ明カデ
 アル。 $(\ell+1)$ 個以上ナイコトモ容易ニ分ル。

定理3 $diagram$ T ガ ℓ 個ノ p -hook をモテ
 バ $T =$ 高サ $r (r = 1, 2, \dots, p)$ ノ p -hook を添加
 スルコトニヨリ $(p + \ell)$ 個ノ相異なる $diagram$ を得ル。

(証明) Lemma 2 ヨリ明カデアル。

2. $diagram$ ノ構造

§3. Normal hook p -regular $diagram$
 $T =$ 高サ r ノ lp -hook H を添加シテ出来ル $dia-$
 $gram$ を T' とシ $T' =$ 於ケル H ノ座標ヲ (i, j) とス
 ル、 T' ハ §2 ニヨリ p -hook をモツガ、 p -hook
 ノ位置ニツイテハ次ノ三ツノ場合ガ考ヘラレル即チ

$(*, j)$ ナル p -hook ヲーツ モツ 場合, $(i, *)$ ナル p -hook ヲーツ モツ 場合 及 ビ $(*, j)$ ナル p -hook ト $(i, *)$ ナル p -hook ヲ モツ 場合 ト デアル。 第一ノ 場合 即チ $(*, j)$ ナル 座標 ヲ モツ p -hook ! ミヲ T' ガ モツ テ キ ル ト キ H ヲ T' ノ $normal\ lp$ -hook ヌ ハ 單ニ $normal\ hook$ ト イフ。 尚 $(*, j)$ ナル 座標 ヲ モツ p -hook ヲ H ノ $first\ p$ -hook ト イヒ $H^{(1)}$ デ 表ハ ス、 H ガ $normal\ hook$ ナル ト キ T ハ $(*, j)$ ナル 座標 ヲ モツ lp -hook, $(1 \leq l' \leq l)$ ヲ モツ コノ hook ヲ H ノ lp -hook ト イフ。 T' ヨリ $H^{(1)}$ ヲ 取 去 ツ テ 出 来 ル $diagram\ T_2$ ハ $(l-1)p$ -hook H' ヲ モツ。 H' ノ 座標 ヲ (i, j_2) ト ス レバ T_2 ハ 座標 $(*, j_2)$ ナル p -hook $H^{(2)}$ ヲ ツー ツ モツ カ ラ、 H' ハ T_2 ノ $normal\ hook$ デアル。 $H^{(2)}$ ヲ H ノ $second\ p$ -hook ト イフ。 カク H ヲ $H^{(1)}$ ヨリ 始メ テ 次々ニ 下 方 カ ラ p -hook ヲ 取 去 ル コト ニ ヨリ 最 後ニ $(i, *)$ ナル 座標 ヲ モツ p -hook $H^{(l)}$ ヲ 得ル、 コレヲ H ノ $last\ p$ -hook ト イフ、 尚 T' ハ H ニ ヨリ 一 意 的ニ 決 定 サ レル カ ラ

$$(8) \quad T' = T \oplus H$$

ト 書ク、 $\oplus$ ハ 添 加 ガ 一 意 的 ナル コト ヲ 示 ス。

Lemma 3 P -regular diagram $T = \text{高サ } r (r = 1, 2, \dots, lp)$ ノ lp -hook H_r ヲ 添 加 シ 得 ル lp 個 $diagram$ 中 H_r

ヲ *normal hook* トシテモツモノガ丁度 p 個存在スル。コレヲ p 個ノ *normal hook*、*last p-hook* ノ高サヲ ν トスレバ $\nu = 1, 2, \dots, p$ トナル。

(証明) 定理ノト同様ニシテ出来ル。

Lemma 3 = ヨリ *normal hook* ハ長サ l_p *last p-hook* ノ高サ ν = ヨリ特徴ヅケラレルコトガ分ツタ。故ニ以下コレヲ $H(l, \nu)$ デ表ハス。

T ヲ p -regular ナラザル diagram トシ。 T ノモツ長サ p ノ倍数ナル *hook* ノ中列ノ座標 j ノ最大ナルモノデ、更ニ長サ最大ナルモノヲ H_1 、ソノ長サヲ l_1, p トスル、 H_1 ノ座標ヲ (i_1, j_1) トスル、 $\Pi(1, j)$ ヲ考ヘレバ H_1 ハ上ニ定義シタ意味ニ於テ $\Pi(1, j_1)$ ノ *normal hook* デアル。従ツテ H_1 ヲ又 T ノ *normal hook* トイフコトニスル。次ニ $T_2 = T - H_1$ ノ *normal hook* ヲ $H_2(l_2, \nu_2)$ トスル。カク *normal hook* $H_1, H_2, \dots$ ヲ次々ニ取り去ルコトニヨリ遂ニ p -regular diagram T_0 ニ到達スル。(7)ニヨリ T_0 ハ T ニヨリ一意的ニ決定サレル故ニ T_0 ヲ T ノ kernel トイフ。

$$(9) \quad T = T_0 \oplus H_2(l_2, \nu_2) \oplus H_{s-1}(l_{s-1}, \nu_{s-1}) \oplus \dots \oplus H_1(l_1, \nu_1)$$

(9) ヲ *normal hook* = ヨル T ノ分解トイフ、コノ

分解が一意的デアルコトハ明カデアル。 H_A ヲ T ノ 第
八番目ノ *normal hook* トイフ。

次ニ $\mathcal{V}_i$ ノ 中等シイモノヲマトメ且ツ同ジ $\mathcal{V}_i$ = 属ス
ル ℓ_λ ヲ大サノ順ニ次ノ如ク並ベル。

$$(10) (\ell_1^{(1)} \geq \ell_2^{(1)} \geq \dots \geq \ell_{\delta_1}^{(1)} \geq 0, 1), (\ell_1^{(2)} \geq \ell_2^{(2)} \geq \dots \geq \ell_{\delta_2}^{(2)} \geq 0, 2) \dots \dots, (\ell_1^{(p)} \geq \ell_2^{(p)} \geq \dots \geq \ell_{\delta_p}^{(p)} \geq 0, p)$$

$$\text{但シ} \quad \sum_{i=1}^p \delta_i = \delta$$

$$\text{コノ} = \sum_{i=1}^{\delta_i} \ell_i^{(p)} = t_\nu \text{ トスレバ}$$

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{\delta} \ell_i = \sum_{\nu=1}^p t_\nu = l$$

但シ ℓ ハ T ヨリ T_c ニ到達スルマデニ取去ル p -hook
ノ個数デアル。

Diagram T ヲ (10) ナル数系ニ對應サセルコトニ
スル、以下コノ對應が一対一ナルコトヲ証明スル。

Lemma 4 p -regular diagram $T_c(\alpha_i) =$
於テ $\alpha_i < p - \delta$ トスル、高サ ν ノ p -hook H ヲ添加
シタ diagram ヲ T, H ノ座標ヲ (i, j) トスレバ
 $1 < j$ ナルトキ $\nu \equiv \delta$ 、 $j = 1$ ナルトキ $\nu < \delta$ ガ成立ス
ル。

Lemma 5 (9) = 於ケル各 *normal hook*
 k_2 ノ first p -hook ノ高サヲ $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\delta$ トスレバ

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s$$

(証明) $T_s = T_0 \oplus H_s$ = 於テ H_s / *first p-hook* $H_s^{(1)}$ / 座標 $\gamma(i, j)$ トスル、又 $T_{s-1} = T_0 \oplus H_s \oplus H_{s-1}$ = 於テ H_{s-1} / *first p-hook* $H_{s-1}^{(1)}$ / 座標 $\gamma(u, v)$ トスル $j < v$ ナル故 $j < i$ トナル、從ツテ $T_{s-1}(u, j+1) = \text{Lemma 4}$ ヲ適用スルコトニヨリ $\mu_{s-1} \leq \mu_s$ 、同様ニシテ $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s$ ヲ得ル。

$T = T_0 \oplus H(l, r_1) \oplus H'(\ell, r_2)$ = 於テ H, H' / 座標 $\gamma(i, j), (i', j')$ トスル、コノトキ次ノ三ツノ場合ガ考ヘラレル。

$$(i) \quad j' < \alpha_i + 1$$

$$(ii) \quad j' = \alpha_i + 1$$

$$(iii) \quad j' > \alpha_i + 1$$

但シ α_i ハ $T_0 \oplus H$ / 第 i 行ノ文字ノ個数トスル (i) / 場合ニハ H' ハ H / 水平部分ヲ切ルトイフ (ii) / 場合ハ H ト H' ハ連結サレテ T ハ (i', j') ナル座標ヲモツ $(\ell+1)p$ -hook H^* ヲモツ、(iii) / 場合ニハ H ト H' ハ離レテキルカラ、コノトキ互ニ独立デアルトイフ、 H' / *first p-hook* / 高サヲ μ トスルトキ (iii) ガ成立スルトキハ $\mu < r_1$ トナル。又 $r_1 = \mu$ ナルトキハ (iii) ガ成立シナイコトモ定理 1 ニヨリ容易ニ分ル。

Lemma 6 $T = T_0 \oplus H(l, r) \oplus H'(\ell, r')$ = 於テ H, H'

1 座標ヲ夫々 $(i, j), (i', j')$ トスル $j' = \alpha_i + 1$ ガ成立
スルノハ $\ell = 1$ ナルトキニ限ル。但シ α_i ハ $T \oplus H$
ノ第 i 行ノ文字ノ個数デアル。

(証明) $j = \alpha_i + 1$ ナルトキハ H ト H' ハ連結サレル
故ニ H' ノ $(\ell - 1)$ p -hook ノ座標ヲ (i^*, j') トスレバ
 $T - H' = T \oplus H(1, r)$ ガ $(i^* - 1, j)$ ナル位置ニ ℓp -
hook ヲモツコトニナリ。 $1 < \ell$ ナルトキハ矛盾ヲ来
ス。

(例) $\ell = 3$ ナルトキ H'

* 2 2 2 2 2		* 3 3 2 2 2		* 3 3
* 2 * *		* 3 2 2		* 3
* 2 *	→	3 3 2	→	3 3
* 2 *		3 2 2		3
1 2		1 2		1
H 1		1		1
1		1		1

Lemma 7 diagram T ニ於テ高サ r_2 ノ p -
hook H_2 ガ高サ r_1 ノ p -hook H_1 ノ水平部分ヲ切
ツテキルトスル H_1, H_2 ノ座標ヲ夫々 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$
トスレバ T ハ $(i_1 + 1, j_1) =$ 高サ $r_1 - 1$ ノ p -hook H_1^*
ヲモツ $T - H_1^* \oplus H_2 =$ ヨツテ決定サレル p -hook H_2'
ヲモチ、 H_2' ノ高サハ $r_2 - 1$, 座標ハ $(i_1, j_1' - 1)$ トナル。

Lemma 8. $T = T_0 \oplus H_{\lambda} \oplus H_{\lambda-1} \oplus \cdots \oplus H_1$ ト
スルトキ T_0 ヲ *kernel* = モチ数系 (10) = 対応スル
diagram ハ T 以外 = ハ存在セズ。

(証明) $\lambda = 1$ ナルトキハ *Lemma 3* トナリ定
理ハ成立スルカラ λ ヨリ小ナルトキハ定理ハ成立ス
ルト假定スル数系 (10) = 対応スル任意 *diagram*
ヲ T' トシ。

(12) $T' = T_0 \oplus H'_{\lambda}(\ell'_{\lambda}, \nu'_{\lambda}) \oplus H'_{\lambda-1}(\ell'_{\lambda-1}, \nu'_{\lambda-1}) \oplus \cdots$
 $\oplus H'_1(\ell'_1, \nu'_1)$ トシ、 $T = T'$ トナルコトヲ証明スル。
 T ノ *normal hook* H_i ノ中長サ ℓ_p ノ最小ナル
モノノ中デ番号 i ノ最小ナルモノヲ $H_t(\ell_t, \nu_t)$ トス
ル。

$$(13) \quad \ell_t < \ell_i \quad (i = t-1, t-2, \cdots, 1)$$

T' ニ於テ (ℓ_t, ν_t) = 対応スル *normal hook* H'_{λ} ノ中
番号 λ ノ最小ナルモノヲ $H'_{r'}(\ell'_{r'}, \nu'_{r'})$ トスル。

$$(14) \quad \ell_t = \ell'_{r'} < \ell'_i \quad (i = r'-1, r'-2, \cdots, 1)$$

$$\nu_t = \nu'_{r'}$$

以下次ノ二ツノ場合ニ分ケテ考へル。

(i) $t = r$ ナルトキ、 T, T' ヨリ夫々 $H_1, H_2, \cdots,$
 $H_t : H'_1, H'_2, \cdots, H'_t$ = 属スル $\ell_t p$ -hook ヲ次々 =

取り去ルコトニヨリ

$$\Sigma = T_0 \oplus H_\delta \oplus \cdots \oplus H_{t+1} \oplus H_{t-1}(\ell_{t-1} - \ell_t, \nu_{t-1}) \\ \oplus \cdots \oplus H_1(\ell_1 - \ell_{t-1}, \nu_1)$$

$$\Sigma' = T_0 \oplus H'_\delta \oplus \cdots \oplus H'_{t+1} \oplus H'_{t-1}(\ell'_{t-1} - \ell_t, \nu'_{t-1}) \\ \oplus \cdots \oplus H'_1(\ell'_1 - \ell_t, \nu'_1)$$

ヲ得ルガ帰納法ノ仮定ニヨリ $\Sigma = \Sigma'$ 従ツテ $T = T'$ ヲ得ル。

(ii) $t \neq r$ ナルトキ ($t > r$ トス). T, T' ヨリ夫々 $H_1, H_2, \dots, H_t; H'_1, H'_2, \dots, H'_t =$ 属スル $(\ell_t - 1)$ p -hook ヲ次々ニ取去ルコトニヨリ得ル diagram ヲ D, D' トスレバ, D, D' $normal\ hook$ 1^{st} p -hook ノ高サニツイテハ Lemma 5 ニヨリ

$$D: \mu_\delta \geq \mu_{\delta-1} \geq \cdots \geq \nu_t \geq \lambda_{t-1} \geq \cdots \geq \lambda_1$$

$$D': \mu'_\delta \geq \mu'_{\delta-1} \geq \cdots \geq \lambda'_t \geq \cdots \geq \nu_t \geq \lambda'_{r-1} \geq \cdots \\ \geq \lambda_1 \quad (\lambda'_r = \nu_t)$$

ヲ得ル。但シ $(\mu_i), (\mu'_i)$ ハ夫々 T, T' $normal\ hook$ 1^{st} p -hook ノ高サデアル。

$$D = T_0 \oplus H_\delta \oplus \cdots \oplus H_{t+1} \oplus H_t^*(1, \nu_t) \oplus H_{t-1}^* \\ \oplus \cdots \oplus H_1^*$$

$=$ 於テ H_{t-1}^* ノ長サ $(\ell_{t-1} - \ell_t + 1)p =$ 於テ $1 < \ell_{t-1} - \ell_t + 1$ ガ成立スル。従ツテ Lemma 6 ニヨリ

H_t^* の水平部分ヲ H_{t-1}^* ガ切ツテキルカ、又ハ H_t^* ト H_{t-1}^* ハ独立ナルカイヅレカデアル。Dヨリ p -hook $H_t^*(1, \nu_t)$ ヲ取去レバ

$\Delta = T_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_{t+1} \oplus H_{t+1}^{**} \oplus \dots \oplus H_r^{**}$
 ヲ得ル、 H_{t-1}^{**} の first p -hook の高サヲ λ_{t-1}^{**} ト
 スレバ H_t^* の水平部分ヲ H_{t-1}^* ガ切ツテキルトキハ
 Lemma 7 = ヨリ $\lambda_{t-1}^{**} = \lambda_{t-1} - 1$ トナリ $\lambda_{t-1}^{**} < \nu_t$ が成立スル。 H_t^* ト H_{t-1}^* ガ独立ナルトキハ
 $\lambda_{t-1}^{**} = \lambda_{t-1} < \nu_t$ トナリイヅレニシテモ $\lambda_{t-1}^{**} < \nu_t$
 故ニ $\Delta = \Delta'$ ナル

$$(15) \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{t+1} > \lambda_{t+1}^{**} \geq \lambda_{t+2}^{**} \geq \dots \geq \lambda_r^{**}$$

ヲ得ル、同様ニシテ D'ヨリ $H_r'(1, \nu_t)$ ヲ取去ツタ
 diagram ヲ Δ' トスレバ Δ' の normal hook の
 各 first p -hook の高サノ間ニハ次ノ関係ヲ得ル。

$$(16) \quad \mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \lambda'_t \geq \dots \geq \lambda'_{r+1} > \lambda''_{r-1} \geq \dots \geq \lambda''_1 \quad (\lambda'_{r+1} \geq \nu_t, \lambda''_{r-1} < \nu_t)$$

帰納法ノ假定ニヨリ $\Delta = \Delta'$ 故ニ $\lambda_{t-1}^{**} = \lambda'_t$ トナル。
 然ルニ (15)(16)ニヨレバ $\lambda_{t+1}^{**} < \nu_t$, $\lambda'_t \geq \nu_t$ ナル故
 $\lambda_{t-1}^{**} \neq \lambda'_t$ トナリ矛盾ヲ来ス、從ツテ必ズ $t = r$ ト
 ナリ結局 $T = T'$ ヲ得ル。

Lemma 9 T の高サ r ナル lp -hook ヲ H_i ヲ
 座標ヲ (i, j) トスル T の δ -数ヲ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ トスルトキ

Lemma 10 T_0 を kernel トシ任意ノ数系⁽¹⁰⁾

= 対応スル *diagram* が存在スル。

(証明) 数系⁽¹⁰⁾ = 於テ $\lambda = 1$ ナルトキハ *Lemma 3* トナリ定理ハ成立スルカラ λ ヨリ小ナルトキハ成立スルト假定スル数系⁽¹⁰⁾ ノ中 $\ell_i^{(2)}$ キオヲ含ム λ ノ中 最小ナルモノヲ λ トシ、 $\lambda =$ 属スル $\ell_i^{(2)}$ ノ中 最小ナルモノヲ $\ell_t^{(2)}$ トスル、今数系⁽¹⁰⁾ ヨリ $(\ell_t^{(2)}, \lambda)$ ヲ除イタ数系⁽¹⁰⁾ ヲ考ヘレバ帰納法ノ假定 = ヨリコノ数系 = 対応スル *diagram* ハ存在スル。コレヲ T' トス

$$(17) \quad T' = T_0 \oplus H'_{\lambda-1} \oplus H'_{\lambda-2} \oplus \cdots \oplus H'_1$$

H'_1 ノ *last p-hook* ノ高サヲ σ トスレバ $\lambda \leq \sigma$
 H'_1 ノ座標ヲ (u, v) トスレバ $T'(1, v+1)$ ハ *p-regular* デ、ソノ第 n 行ノ文字ノ個数 $\delta'_\mu = p - \sigma$
 $T'(1, v+1) \oplus H(1, \lambda) =$ 於テ $H(1, \lambda)$ ノ座標ヲ (m, n) トスレバ $m < n$ トナル故ニ $T'(1, v+1) \oplus H(1, \lambda)$ ノ左側 = T' ノ第一列ヨリ第 v 列マデヲ加ヘルコトニヨリ、 $T' =$ 高サ λ ノ *p-hook* H ヲ $(m, n+v)$ ナル位置 = 於テ添加セル *diagram* ヲ得ル。コノ *diagram* ヲ T'' トスレバ

$$(18) \quad T'' = T_0 \oplus H'_{\lambda-1} \oplus H'_{\lambda-2} \oplus \cdots \oplus H'_1 \oplus H(1, \lambda)$$

トナル、 T'' ノ σ -数ヲ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ トスル $\sigma_p - \sigma_{n+v} = (\ell_t^{(2)} - 1)p$, $(p < n+v)$ ナルトキハ *Lemma 6* = 於ケル証明ト同様ニシテ T' が $(\ell_t^{(2)} - 1)p$ ナル長サノ

hook ヲモツコトニナリ $\ell_t^{(\lambda)}$ ガ最小ナルコトニ反ス
 故ニ Lemma 9 ニヨリ $\delta p - \delta_{n+v} < (\ell_t^{(\lambda)} - 1)p$ ヲ
 満足スル最小ノ p ヲ σ トスレバ $(m + \lambda, \sigma)$ ナル位
 置ニ於テ $T'' = (\ell_t^{(\lambda)} - 1)p$ -hook H' ヲ添加シテ H' ガ H
 $(1, \lambda)$ ノ下端ニ連結スル如クナシ得シ。 $T'' = H'$ ヲ添
 加セル diagram ヲ T^* トスレバ、 T^* ハ (m, σ) ナル
 座標ノ $\ell_t^{(\lambda)}p$ -hook H^* ヲモチ H^* ハ H' ト H ニ分解サ
 レル T^* ハ $(*, \sigma)$ ナル p -hook ヲモチ $(m, *)$ ナル
 p -hook ニモタナイコトハ、我々ノ T^* ノ const-
 mation ニリ明カデアアル。従ツテ H^* ハ T^* ノ nor-
 mal hook トナル。恒シ first normal hook
 ニナルトハ限ラナイ。即チ T^* ニ於ケル H_t' ノ座標
 ヲ (i_t, j_t) トスルトキ $j_t < \sigma < j_{t-1}$ ナルトキハ
 (19) $T^* = T_0 \oplus H_{\sigma-1}' \oplus H_{\sigma-2}' \oplus \cdots \oplus H_{\ell}' \oplus H \oplus H_{\ell-1}' \oplus \cdots \oplus H_1'$
 トナル。 H^* ノ last p -hook ハ明ラカニ H ナル故
 ヲノ高サハ入デアアル。従ツテ H^* ハ $(\ell_t^{(\lambda)}, \lambda)$ ニ対応
 スルモノデアアル。故ニ T^* ハ求ムル数系 (10) ニ対応ス
 ル diagram デアル。

以上ニヨリ我々ノ目的ナル次ノ定理ヲ得ル。

定理 4 p -regular diagram T_0 ヲ kernel
 トシ、 ℓ 個ノ p -hook ヲ次々ニ添加シテ得ラレル
 diagram ト数系 (10) ハ一対一ノ対応ヲナス、
 数系 (10) ノ個数ヲ $M(\ell)$ トスレバ

$$(20) \quad M(\ell) = \sum_{\ell=t_1+t_2+\dots+t_p} N(t_1)N(t_2)\dots N(t_p)$$

但シ $N(t_i)$ ハ 對稱群 S_{t_i} ノ *diagram* ノ 個數デ
 ール。

定理 5 p -regular *diagram* T_0 ヲ *kernel*
 トシ、 ℓ 個ノ p -hook ヲ 次々ニ 添加シテ 得ラレル
diagram ノ 個數ハ T_0 = 無關係デ $M(\ell)$ デ 与ヘラレ
 ル。

S_n = 於テ $n = kp + r$ ($0 \leq r < p$) トスル。又 S_n
 ノ p -regular *diagram* ノ 個數ヲ $f(n)$ デ 表ハス
 コトニ スレバ S_n ノ *diagram* ノ 個數 $N(n)$ ハ 定理
 5ニヨリ 次式ニテ 与ヘラレル。

$$(21) \quad N(n) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f(n - \ell p) M(\ell)$$

S_n ノ 既約表現ノ 個數ハ、 $\vee$ ノ *diagram* ノ 個數ニ
 等シキ故

定理 6 對稱群 S_n ノ 既約表現ノ 個數ハ (21) デ 与
 ヘラレル。

3. S_n ノ 既約表現ノ 個數

§ 4. S_n ノ 既約表現ノ 個數 本章ニ於テハ $p=2$ ト
 スル。從ツテ長サガ 偶數ナル hook ヲモタナイ *dia-*
gram ヲ *regular diagram* トイフコトニスル。

Lemma 11. $T(k, k-1, \dots, 2, 1)$ ナル *diagram*
 ハ *regular* デアル逆モ成立スル。

故 $= S_n$ ハ $n = k(k+1)/2$ ナルトキニ限り
regular diagram ヲ只ツモツ、即チ

$$(22) \quad f(n) = \begin{cases} 1 & n = k(k+1)/2 \text{ ナルトキ} \\ 0 & n \neq k(k+1)/2 \text{ ナルトキ} \end{cases}$$

定理 7 S_n ノ 既約表現ノ 個数ハ $n - 2\ell = k(k+1)/2$
 ($k=0, 1, 2, \dots$) ヲ 満足スル ℓ ヲ $0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots$
 $< \ell_t$ トスレバ 次式ニテ与ヘラル。

$$(23) \quad N(n) = \sum_{i=1}^t M(\ell_i) = \sum_{i=1}^t \sum_{r=0}^{\ell_i} N(r) N(\ell_i - r)$$

(証明) (21), (22) ヲリ直ニ得ラル

(例) S_9 : $\ell_1 = 3, \ell_2 = 4$

$$N(9) = N(0)N(4) + N(1)N(3) + N(2)N(2) + N(3)N(1)$$

$$+ N(4)N(0) + N(0)N(3) + N(1)N(2) + N(2)N(1) + N(3)N(0)$$

$$N(0) = 30$$

定理 7 ニヨリ S_{20} マデノ 既約表現ノ 個数ヲ 求メレ
 バ次ノ表ヲ得ル。

$$M(\ell) = \sum_{r=0}^{\ell} N(r) N(\ell-r) \text{ トスレバ}$$

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(\ell)$	1	2	5	10	20	36	65	110	185	300	481

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

§ 5. S_n / 自己共軛既約表現 / 個数. $T = \overline{T}$ ナル $diagram$ $\rightarrow$ 自己共軛 $diagram$ トイフコトハ既ニ $\S$ 1デ述べタガ、自己共軛 $diagram$ $=$ ハ自己共軛既約表現が対応スルコトハ良ク知ラレテナル、以下自己共軛 $diagram$ $\rightarrow \Delta$ デ表ハス、 Δ / α -数、 γ -数 $\rightarrow (\alpha_i), (\gamma_j)$ トスレバ

$$(24) \quad \alpha_1 = \gamma_1, \alpha_2 = \gamma_2, \dots \quad \alpha_k = \gamma_k$$

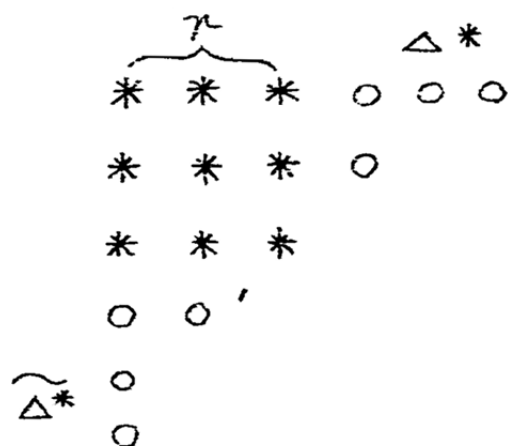
$\Delta =$ 於テ $(i, i), (i=1, 2, \dots)$ ナル座標ヲモツ文字ノ個数ヲ Δ ノ対角線ノ長サト云フ。

Δ ノ対角線ノ長サガ γ ナルトキハ

$$(25) \quad \alpha_{r+1} = \gamma_{r+1} \leq \gamma$$

が成立スル。 $\Delta(1, r+1) = \tilde{\Delta}(r+1, 1) + \text{ル}$ 故、
 $\Delta \wedge \gamma \vdash \Delta(r+1, 1) = \text{ヨリ一意的} = \text{決定サレル}$ 。
 故 $= \Delta = (r, \Delta^*)$ ト表ハスコトニスル、但シ Δ^*
 $= \Delta(1, r+1)$ デアル。 $\Delta \nabla \Delta$ characteristic
diagram トイフ。従ツテ Δ の構造ハ Δ^* の normal hook
 ニヨル分解ニヨリ分カルワケデアル。

(例)



定理 8 Δ の kernel Δ_0 ハ又自己共軛デアル

(証明) Δ が座標 (i, i) ナル lp -hook H フモテバ
 $\Delta - H$ ハ自己共軛デアル。次ニ Δ が $(i, j), (i \neq j)$ ナル
 座標ノ lp -hook H フモテバ、 Δ ハ又 (j, i) ナル
 座標ノ lp -hook $\tilde{H}$ フモツ。 $r < i$ ナルトキハ H
 ト $\tilde{H}$ ハ独立トナリ $(T-H) - \tilde{H}$ ハ自己共軛 $i < r, j \leq r$
 ナルトキハ $T-H$ ハ $(j-1, i)$ ナル座標ヲモツ lp -
 hook $\tilde{H}^*$ フモツ、且ツ $(T-H) - \tilde{H}^*$ ハ自己共
 軛デアル $i \leq r, j < r$ ナル場合及ビ $r < j$ ナル場
 合モ同様デアル。

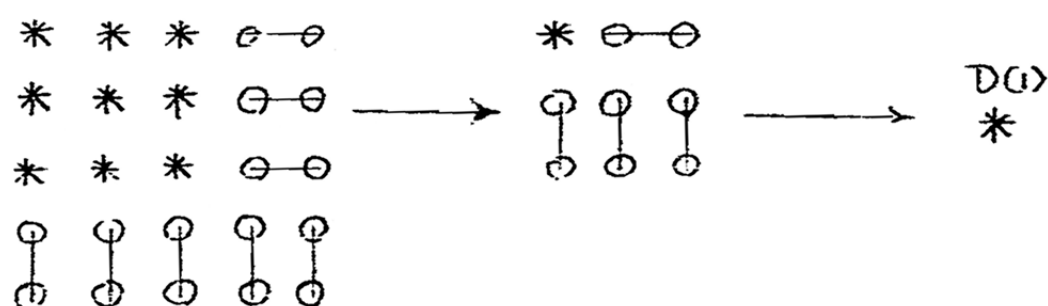
以下又 $P=2$ トスル. *regular diagram*
 $T(k, k-1, \dots, 2, 1)$ ハ自己共軛デアル. T ハ
 $k = \text{ヨリ一意}$ 的 = 決定サレル故 $T = D(k)$ デ表ハス
 自己共軛 *diagram* ヲ表ハス我々ノ記法 = ヨレ
 バ

$$(26) \quad D(2s) = (s, D^*(s))$$

$$D(2s+1) = (s+1, \overbrace{D^*(s-1)}^{\alpha, \gamma})$$

Lemma 12. $\Delta(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ ナル正方形狀ノ
diagram ノ *kernel* ハ $\alpha = 2m$ ナルトキ
 $D(0)$, $\alpha = 2m+1$ ナルトキ $D(1)$ トナル.

(証明) 次ノ例 = ヨリ明カデアル.



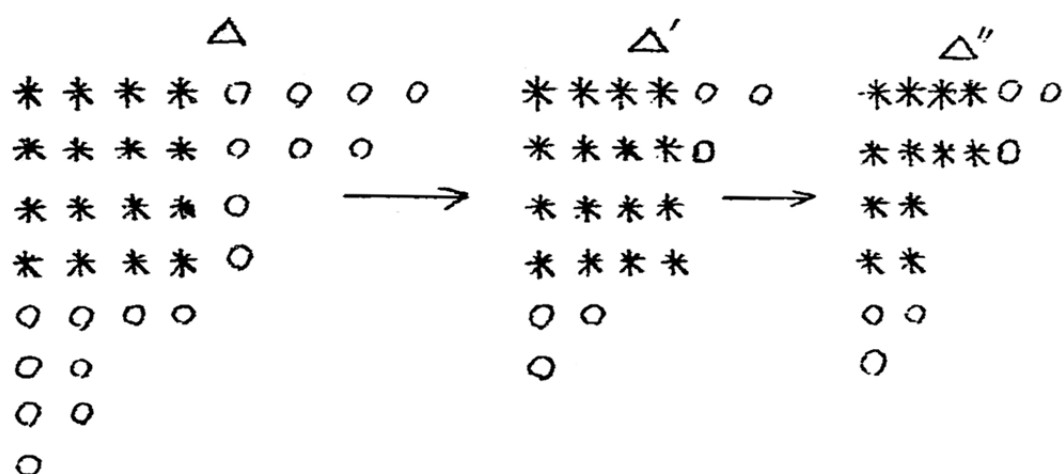
定理 9 $D(k)$ ノ *kernel* トスル自己共軛 *diagram*
 Δ トスル. Δ ノ *characteristic diagram* Δ^*
 ノ *kernel* ハ $D(k)$ ノ *characteristic diagram*
 デアル.

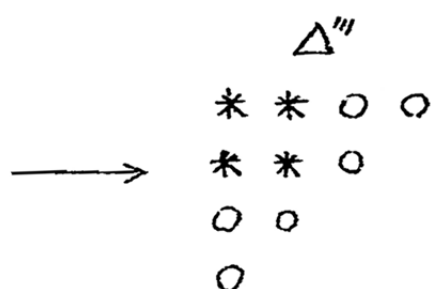
(証明) Δ^* ノ *kernel* ヲ $D(s)$ トスレバ Δ^* 及び $\tilde{\Delta}^*$ カ
 ラ長サガ偶数ナル *hook* ヲ取去ルコト = ヨリ $\Delta^*, \tilde{\Delta}^*$

$\longrightarrow D(\delta)$ ナルトキ $\Delta = (r, \Delta^*) \longrightarrow \Delta' = (r, D(\delta))$ ト
 ナル、 $\Delta'(r+1, r+1) = \text{Lemma 12}$ ヲ適用スル
 コトニヨリ $r - \delta = 2\lambda$ ナルトキハ $\Delta'(r+1, r+1)$
 kernel ハ $D(0)$ 、故ニ $\Delta'(r+1, r+1) \longrightarrow D(0)$
 ナルトキ $(r, D(\delta)) \longrightarrow \Delta'' = (\delta, \Delta(r, r-1, \dots,$
 $r - \delta + 1))$ トナル、 $\Delta(r, r-1, \dots, r - \delta + 1)$
 kernel ハ明カニ $D(\delta)$ ナル故、 $\Delta(r, r-1, \dots, r -$
 $\delta + 1)$ 、 $\widetilde{\Delta}(r, r-1, \dots, r - \delta + 1) \longrightarrow D(\delta)$ ナ
 ルトキ $\Delta'' \longrightarrow \Delta''' = (\delta, D(\delta))$ トナル、 Δ''' ハ *regular*
 テアルカニ Δ 、 kernel テアル。即チ Δ^* 、 kernel
 $D(\delta)$ ハ Δ''' ノ *characteristic diagram* トナル。
 次ニ $r - \delta = 2\lambda + 1$ ナルトキハ

$\Delta \longrightarrow \Delta' = (r, D(\delta)) \longrightarrow \Delta'' = (\delta + 1, \Delta(r-1, r-2,$
 $\dots, r - \delta)) \longrightarrow \Delta'''(\delta + 1, D(\delta))$
 トナリ Δ^* 、 $\text{kernel } D(\delta)$ ハ Δ 、 $\text{kernel } \Delta'''$ 、
characteristic diagram テアル

(例)





Lemma 13 Δ ノ長サガ偶数ナル hook ノ座標 $\gamma(i, j)$ トスレバ $i \equiv j$ デアル。

(証明) hook H ノ長サヲ g , 高サヲ h トスレバ $i \equiv j$ ナルトキハ $g = 2h - 1$ トナリ奇数トナル。

Lemma 14 $D(h)$ ノ kernel トスル自己共轭 diagram Δ ノ対角線ノ長サヲ r トスレバ $r - r'$ ハ偶数デアル。但シ r' ハ $D(h)$ ノ対角線ノ長サトスル。

(証明) Δ カラ $D(h) =$ 到達スルマデニ取去ルベキ長サ2ノ hook ノ個数ハ Lemma 13 ニヨリ偶数デアルカラ、コレヲ 2ℓ トスル。又 Δ^* カラ $D^*(h) =$ 到達スルマデニ取去ルベキ長サ2ノ hook ノ個数ヲ t トスレバ

$$r^2 - r'^2 = 4(\ell - t)$$

ガ成立スル、故ニ $r - r'$ ハ偶数デアル。

愈々我々ノ目的ナル Δ ノ構造ヲ調べルコトニスル。
 Δ カラ、ソノ kernel $D(h) =$ 到達スルマデニ取去ルベキ長サ2ノ hook ノ個数ヲ 2ℓ トスル、 Δ , $D(h)$

1 対角線 1 長サヲ r, r' トスレバ Lemma 14 =
ヨリ $r = r' + 2\lambda$ テアル。 Δ 1 characteristic
diagram $\Delta^* (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_k^*)$ 1 normal
roots = ヨル 分解ヲ

$$(27) \quad \Delta^* = \Delta_0^* \oplus H_3(\ell_3, \nu_3) \oplus \dots \oplus H_1(\ell_1, \nu_1)$$

($\nu_i = 1$ 又ハ 2)

トスル。従ツテ Δ^* = 対応スル数系ヲ

$$(28) \quad (\ell_1^{(1)} \geq \ell_2^{(1)} \geq \dots \geq \ell_s^{(1)} \geq 0, 1), (\ell_1^{(2)} \geq \ell_2^{(2)} \geq \dots \geq \ell_{s_2}^{(2)} \geq 0, 2) \text{ トスレバ } (25) = \text{ヨリ } \alpha_1^* \leq r \text{ ナル故}$$

$$(29) \quad \ell_1^{(1)} \leq r' + \lambda, \quad \ell_1^{(2)} \leq \lambda$$

が成立スル。又

$$(30) \quad \ell^* = \sum_i \ell_i^{(1)} + \sum_i \ell_i^{(2)}$$

トスレバ $r^2 - r'^2 = 4(\ell - \ell^*)$ ナル故

$$(31) \quad \ell^* = \ell - \lambda(r' + \lambda)$$

トナル。以上ニヨリ次ノ定理ヲ得ル

定理 10 $D(k)$ ヲ kernel トスル自己共軛 diagram
 Δ 1 characteristic diagram Δ^* = 対応ス
ル数系 (28)ハ (29), (31) 1 条件ヲ満足シナクテハナラ
ナイ。

今 S_n 1 diagram 1 中 $\alpha_i \leq \rho$ ナルモ 1 1 個数ヲ
 $N_\rho(n)$ テ表ハスコト = スレバ (29), (31)ヲ満足ス
ル数系 (28) 1 個数ハ

$$(32) \quad \sum_{i=0}^{\ell^*} N_{r'+\lambda}(i) N_\lambda(\ell^* - i), \quad \ell^* = \ell - \lambda(r' + \lambda)$$

トナル、即チ $D(\ell)$ ヲ *kernel* トシ 対角線ノ長サガ n ナル S_n ノ 自己共軛 *diagram* ノ 個数ハ (32) ニテ 与ヘラレル。但シ $n = 4\ell + \ell(\ell+1)/2$ トスル。

故ニ

Lemma 15 $D(\ell)$ ヲ *kernel* トスル S_n , ($n = 4\ell + \frac{\ell(\ell+1)}{2}$) ノ 自己共軛 *diagram* ノ 個数ハ

$$(33) \quad \bar{N}(\ell) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda^*} \sum_{i=0}^{\ell-\lambda(r'+\lambda)} N_{r'+\lambda}(i) N_{\lambda}(\ell-\lambda(r'+\lambda)-i)$$

= 等シイ。但シ λ^* ハ $0 \leq \ell - \lambda(r'+\lambda)$ ヲ 満足スル 最大ノ λ デアル。

以下 $\bar{N}(\ell)$ ガ S_{ℓ} ノ *diagram* ノ 個数 $N(\ell)$ = 等シイ
コトヲ 証明スル。 S_{ℓ} ノ *diagram* T ノ α -数, r -数
ヲ 夫々 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k : r_1, r_2, \dots, r_m$ トスル r' ヲ
与ヘラレタ 数 トスルトキ T ガ

$$(34) \quad \alpha_{r'+\lambda+1} \leq \lambda, \quad r_{\lambda+1} \leq r' + \lambda$$

ヲ 満足スルトキハ $T(i, \lambda+1)$ ノ 第一列ノ 文字ノ 個数
ハ $r' + \lambda$ ヨリ 大ニハナレナイ。同様ニ $T(r'+\lambda+1, 1)$
ノ 第一行ノ 文字ノ 個数ハ λ ヨリ 大ニナレナイ。従ツ
テ

(34) ナル 条件 ヲ 満足スル S_{ℓ} ノ *diagram* ノ 個数ハ

$$(35) \quad \sum_{i=0}^{\ell-\lambda(r'+\lambda)} N_{r'+\lambda}(i) N_{\lambda}(\ell-\lambda(r'+\lambda)-i)$$

トナル。

(例)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \lambda & & & & \\
 & & \swarrow & \downarrow & \searrow & & \\
 & * & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 & * & * & * & \circ & & & \\
 r'+\lambda \left\{ \begin{array}{l} * & * & * & \circ \\ * & * & * & \circ \\ * & * & * & \circ \end{array} \right. & & T(1, \lambda+1) & & & & \\
 & * & * & * & & & & \\
 & \circ & \circ & \circ & & & & \\
 T(r'+\lambda+1, 1) \circ & \circ & & & & & & \\
 & \circ & & & & & &
 \end{array}$$

故 = (35) ヨリ λ ヲ動かスコト = ヨリ

$$N(\ell) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda^*} \sum_{i=0}^{\ell-\lambda(r'+\lambda)} N_{r'+\lambda}(i) N_{\lambda}(\ell-\lambda(r'+\lambda)-i) = \bar{N}(\ell)$$

ヲ得ル。

定理 11 $D(k)$ ヲ kernel トスル S_n ($n = 4\ell + \frac{k(k+1)}{2}$) ノ 自己共軛 diagram ノ 個数ハ S_{ℓ} diagram ノ 個数 $N(\ell)$ = 等シイ

定理 11 ヨリ 直今 = 我々ノ 目的ナル次ノ 定理ヲ得ル

定理 12 $n - 4\ell = k(k+1)/2$, ($k = 0, 1, 2, \dots$)
ヲ 満足スル ℓ ヲ $0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_m$ トスレバ S_n
ノ 自己共軛 diagram ノ 個数 $N^*(n)$ ハ

$$(36) \quad N^*(n) = \sum_{i=1}^m N(\ell_i)$$

トナル

(例) S_{15} : $\ell_1 = 0, \ell_2 = 3$

$$N^*(15) = N(0) + N(3) = 4$$

既 = S_{20} マデハ $N(20)$ ガ 求メテアルカラ $N^*(23)$

マデバ 計算出来ルヲケテアルガ、コノ = ハ S_{10} ヨリ

S_{40} マデノ $N^*(n)$ ノ 値ヲ求メテ見タ。

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$N^*(n)$	2	2	3	3	3	4	5	5	5	6	7	8	8	9	11	12	12

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
14	16	17	18	20	23	25	26	29	33	35	37	41	46

(脚註)

(1) 中山正: *On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group* I. II. 輯報第17巻以後

中山 I, 中山 II トシテ引用スル。

(2) 中山 II p. 423