



Title	連続関数環ニツイテ
Author(s)	吉澤, 尚明
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 266, p. 245-249
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75126
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

吉澤 尚 明 (級大学生)

(9月25日受付)

以下ニ、極々簡單ナコトデアリマスガ、連続函数ノ擴張ニ関スルーツノ向題ニ就イテ報告致シマス、尚、コレハ、目下角谷静夫先生ニ指導シテ頂イテ居リマス セミナリーニ於テ証明シタコトデアリマスガ、本文ニ関シマシテモ、種々御指導ヲ受ケマシタ。

1. Ω ヲ *bicompact Hausdorff space* トスル時、 Ω デ定義サレタ複素数値連続函数 $z(\omega)$ ノ全体ハ、normヲ $\|z\| = \max_{\omega \in \Omega} |z(\omega)|$ ト定義スルコトニヨリ、ノルム環ヲ作ル。コレヲ $C(\Omega)$ デ表ハス。今、 F ヲ Ω ノ閉集合トスル時、 F ノ上デ連続ナ函数ハ、*Weierstrass*ノ擴張定理ニヨツテ、 Ω ノ上ハ連続ニ擴張スルコトが出来ル。即チ、 $z_F \in C(F)$ ニ対シテ、 F ノ上デ $z_F(\omega) \equiv z_\Omega(\omega)$ トナル如キ $z_\Omega \in C(\Omega)$ ガ存在スル。(勿論、 $C(F)$ ハ F ノ上ノ複素数値連続函数全体ノ作ルノルム環デアル。 $\|z\| = \max_{\omega \in F} |z(\omega)|$ ト定義スル) 此ノ場合、 F ガ Ω ノ真部分集合ナラバ、一ツノ $z_F(\omega)$ ノ擴張 $z_\Omega(\omega)$ ハ唯一ツデハナイガ、任意ニ一ツヲ選ブコトニヨツテ $C(F)$ カラ $C(\Omega)$ ノ中ヘノ一意写像 φ ガ定義サレル。此ノ φ トシテ、
linear, multiplicative 且 *isometric* ナルモノ

証明：要点 $\mathcal{H}$ 、 R 1- $\mathcal{H}$: maximal ideal $= \mathcal{H}$
 Ω 1- $\mathcal{H}$ 又 Ω 1- $\mathcal{H}$ $= \mathcal{H}$ 、 R maximal ideal
 シクトモーツ対応スルコトカラ、 R maximal ideal
 全体 $=$ weak topology ヲ入レタモ Ω ガ、 Ω 連続
 像ニナルコトデアル。シカラバ、 R $\mathcal{H}(\Omega)$ ト equivalent
 ニアル。定理：後半ハ明ラカデアル。

定理 2.2. Ω, Ω' は compact Hausdorff spaces とする。
 $C(\Omega')$ と equivalent する $C(\Omega)$ の部分環 R (R が $C(\Omega)$
 の単位元を含むことへ仮定しない) が存在するたきの必要且
 充分な条件は、 Ω' が Ω の連続像であることである。

証明、 充分ナルコトハ、定理1ノ後半ソノモノデアルカラ、
必要ナルコトヲ証明スル、

(1') $C(\Omega)$ の単位元 $e' =$ 対応スル R の元 $e(u)$ に、 $e'^2 = e'$ ナルコトカラ、 Ω の上デ 1 又ハ 0 ナル値ヲミヲトル。今、
 $\Omega_1 = \{w | e(w) = 1, w \in \Omega\}$, $\Omega_2 = \{w | e(w) = 0, w \in \Omega\}$
 トスレバ、 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 、且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ デアル。故ニ、
 Ω_1 及び Ω_2 ハ何レモ *bicomact Hausdorff space* デアル。又、定理ヲ証明スルニハ、 Ω' ガ Ω_1 の連続像デアル
 コトヲ示セバ充分デアル。

(2') $\omega'(\omega')$ が Ω' の上で実数値ノミヲトル $C(\Omega')$ ノ元トスルヲバ、対応スル $\omega(\omega) \in R$ モ、 Ω_1 ノ上で実数値ノミヲトル;

今、或る $\rho \in \Omega_1$ に対して、 $\varepsilon(\rho) = \lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$ なる ρ がある。

スル。シカレバ、 $y' \equiv (x' - \lambda e')^2 + (\mu e')^2 =$ 対応スル $y \equiv (x - \lambda e)^2 + (\mu e)^2$ ハ、 $y(p) = 0$ 。一方、 Ω' ノ上デ、 $y'(w') \geq \mu^2 > 0$ ナルカラ $C(\Omega') = \emptyset$ 、 y' ノ逆元 z' ガ存在スル：
 $y' z' = e$ 。故ニ、 $z' =$ 対応スル $z =$ 関シテ、 $y \cdot z = e$ 、即チ Ω_1 ノ上デ、 $y(w) \cdot z(w) \equiv 1$ デナケレバナラナイ。コレハ $y(p) = 0$ 反スル。故ニ、 $z(w)$ ハ Ω_1 ノ上デ実数値デナケレバナラナイ。

(3) Ω' ノ上デ $y'(w') \equiv \overline{x'(w')}$ ナレバ、 Ω_1 ノ上デ、 $y(w) \equiv \overline{x(w)}$ 。

何トナレバ、 $x'(w') + y'(w') = \frac{1}{2} \{x'(w') - y'(w')\}$ ハ Ω' ノ上デ共ニ実数値ノミヲトル、故ニ、(2°)ニヨツテ、 $x(w) + y(w) = \frac{1}{2} \{x(w) - y(w)\}$ 且 Ω_1 ノ上デ、実数値ノミヲトル、故ニ $\overline{x(w)} \equiv y(w)$ 。

(4) 即チ $R \cap C(\Omega)$ ノ条件(*)ヲ満ス *closed subring* デアル。故ニ定理1ニヨツテ、 $R \cap \Omega_1$ 或ハ連続像 $\Omega'' =$ 関スル $C(\Omega'')$ ト *equivalent* デアル。従ツテ、 $C(\Omega_1) \cap C(\Omega'')$ トハ同型デアル。ヨク知ラレタ定理ニヨツテ Ω_1 ト Ω'' トハ *homeomorphic*、即チ Ω_1 ハ Ω_1 ノ連続像デアル。

[證 終]

定理 3. Ω ヲ *bicompact Hausdorff space*、 F ヲ Ω ノ所集念トスル時、 F ノ算ノ複素数値連続函数ノ全体ニ Ω ノ上ヘ同時ニ、*linear, multiplicative* 且 *isometric*ニ拡張出来ルタメニ必要且充分ナル條件ハ、 $F \in (Brsuk$

ノ意味デ) Ω ノ *retract* ナルコトデアル。

証明 充分ナルコトハ殆ンド明ラカデアルカラ、必要ナルコトノミヲ證明スル。

$C(F)$ ヲ $C(\Omega)$ ノ中ヘ同時ニ(定理ニ云フ如ク)拡張出来タトシテ、拡張サレタ $C(\Omega)$ ノ元ノ全体ヲ R トスル、シカラバ R ハ $C(F)$ ト *equivalent* ナル $C(\Omega)$ ノ *closed subring* デアル。

故ニ定理2ニ於テ証明シタコトヨリ、 R ハ Ω ノ或連続像 $f(\Omega) \equiv \Omega' = \text{閉スル } C(\Omega)$ ト *equivalent* デアル。ユノ場合定理1ノ証明ヨリ容易ニワカル如ク、 F ハ Ω' ノ中ニ *homeomorphic* ニ *embed* サレテキル： $F \approx F' \leq \Omega'$ 。(F ノ各点ニハ R ノ *maximal ideal* ガ一ツ且唯一ツ對應スルコトヨリ明ラカデアル。) 故ニ $F' = \Omega'$ ヲ云ヘバ、証明が完結スルワケデアル。

今、 $x' \neq y'$, $x', y' \in C(\Omega)$ トスレバ、對應スル $x, y \in R$ ハ、 R ガ $C(F)$ ノ拡張デアルコトカラ、 F ノ上デ、 $x(w) \neq y(w)$ デアル。故ニ、 F' ノ上デ $x'(w') \neq y'(w')$ デナケレバナラナイ。(何トナレバ、 $w' = f(w)$ ナラバ、 $x'(w') = x(w)$ デアル。) 故ニ $F' \cap \Omega'$ ノ真部分集合デハアリ得ナイ。即チ $\Omega' = F'$ デナケレバナラナイ。 (証終)