



Title	行列ニ関スル若干ノ定理ノ初等的証明
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 266, p. 250-253
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75127
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1194 行列=関スル若干ノ定理ノ初等的 証明

春 木 博 (神高船)

(10月22日受附)

行列=関スル次ノ三定理ハ著名デアアル。

(定理1) $f(x)$ ヲ x ノ巾級数 $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k + \cdots$ トスルトキ、 $f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_k A^k + \cdots$ デ表ハサレル n 次ノ行列 A ノ巾級数が収斂スルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ A ノ特有根ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ トスルトキ、 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ が収斂スルコトデアアル。但シ λ_i ガ p 次ノ等根ナラバ $f^{(p-i)}(\lambda_i)$ ノ収斂ヲ附加スル。(Henselノ定理)

(定理2) n 次ノ行列 A ノ特有整式ヲ $D(x)$ トスレバ $D(A) = 0$ デアル。(Hamilton-Cayleyノ定理)

(定理3) $f(x)$ ヲ x ノ任意ノ整式トシ、 A ノ特有根ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ トスレバ、 $f(A)$ ノ特有根ハ、 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ デアル。

(Frobeniusノ定理)

以上ノ三定理ヲ統一的に証明シテ見ヨウ。証明ハ記述ノ簡単ノ爲ニ次ノ行列ノ場合ニツイテ証明スル。一般ノ n 次ノ行列ノ場合モ全ク同様デアアル。

(Lemma) $f(x)$ ヲ x ノ巾級数 $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k + \cdots$ トシ、 A ヲ二次ノ行列、且ツ λ_1, λ_2 ノ特有根ヲ λ_1, λ_2 トスレバ

$$\begin{cases} f(A) = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} E & (\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ ナルトキ}) \\ f(A) = f'(\lambda) A + [f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)] E & (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ ナルトキ}) \end{cases}$$

(証明) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ トシ $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ トス。

スルト $A^{n+1} = A^n A$ ナルコトカラ

$$\begin{cases} a_{n+1} = a a_n + c b_n & \dots\dots\dots (1) \\ b_{n+1} = b a_n + d b_n & \dots\dots\dots (2) \\ c_{n+1} = a c_n + c d_n & \dots\dots\dots (3) \\ d_{n+1} = b c_n + d d_n & \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

(1), (2) ヨリ $a_{n+2} - (a+d)a_{n+1} + \Delta a_n = 0$

(但シ $\Delta = \delta(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$)

ニノ回帰公式ヨリ a_n ヲ決定スルニハ、ヨクヤルヤウニ

巾級数 $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} + \dots$ ハ

$1 - (a+d)x + \Delta x^2$ (ニハ $(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x) =$ 等シイ!)ヲカケ

ルコトニヨリ：回帰公式ヲ用キテ 結局

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} + \dots = \frac{a - \Delta x}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)} \text{ヲ得ル。}$$

先ツ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ナル場合カラ論ズル。

コノトキハ、右辺ノ分数式ヲ部分分数ニ分テ、ソレカラ巾級数

ニ展開シ、左右両辺ノ相当項ノ係数ヲ相等シトオキ $\Delta = \lambda_1 \lambda_2$

ナル關係ヲ用キレバ結局

$$a_n = \frac{a(\lambda_1^n - \lambda_2^n) + (\lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_2 \lambda_1^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

(1), (2), (3), (4) より全ク同様ニシテ

$$b_n = \frac{b(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$c_n = \frac{c(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$d_n = \frac{d(\lambda_1^n - \lambda_2^n) + (\lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_2 \lambda_1^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

以上ニヨリ A^n ノ形ハ判ツタカラ、之ヲ $f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_k A^k + \dots$ ヘ代入スレバ結局 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ナルトキハ

$$f(A) = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} E$$

トナル。

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ナルトキハ、上式ニ於テ、 $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ ナラシムレバヨイ。(証明了)

コノ Lemma ノ証明が出来レバ、前述ノ定理ノ証明ハ容易デアル。

定理1ノ証明 Lemma ヨリ明カ。

定理2ノ証明 $D(x)$ ヲ行列 A ノ特有整式トシ $f(x)$ ヲ二次ノ任

意ノ整式、 $x^2 + \beta x + \gamma$ トスル。 [$f(x) - D(x)$ トシテモヨイ]

又、 A ノ特有根ヲ λ_1, λ_2 トスル。

$f(x)$ ヲ $D(x)$ デ割レバ商ハ 1 トナリ、剰余 $R(x)$ ハ

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ ナルトキハ } \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ ナルトキハ } f'(\lambda)x + (f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)) \end{cases}$$

トナル。即チ $f(x) = D(x) + R(x)$

コノ式ニ於テ λ ノトコロヘ A トオケバ

$$f(A) = D(A) + R(A)$$

サテ *Lemma* ニヨリテ度 $f(A) = R(A)$ ダカラ

$$D(A) = 0$$

定理3ノ証明 *Lemma* ヲ使ヘバ計算ニヨリ容易ニ証サレル。以上ハ 二次ノ行列ノ場合ニツイテ証明シタガ、 n 次ノ場合モ全ク同様ニ証サレル。タダ *Lemma* ニ於テ $f(A)$ ノ形ガ二次ノ場合ハ $f(x)$ ヲ A ノ特有整式 $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ ニ割ツタトキノ剰余(高々一次)トナツタガ、 n 次ノ場合ハ $f(A)$ ノ形ハ、 $f(x)$ ヲ A ノ特有整式(n 次)デ割ツタトキノ剰余(高々 $n-1$ 次)トナル迄デアル。

(完)