OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	行列ニ関スル若干ノ定理ノ初等的証明
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 266, p. 250-253
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75127
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1194 行列ニ関スル若干ノ定理ノ初等的証明

春木 博 (神高船)

(10月22日受附)

行列ニ関スル次ノ三定理ハ著名デアル。

(定理1) $f(x)$ ヲ x ノ巾級数 $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n+\cdots$ トスルトキ、$f(A)=\alpha_0 E+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots+\alpha_n A^n+\cdots$ デ表ハサレル n 次ノ行列 A ノ巾級数ガ収斂スルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ A ノ特有根ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ トスルトキ、$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ ガ収斂スルコトデアル。但シ λ_i ガ p 次ノ等根ナラバ $f^{(p-1)}(\lambda_i)$ ノ収斂ヲ附加スル。(Hensel ノ定理)

(定理2) n 次ノ行列 A ノ特有整式ヲ $D(x)$ トスレバ $D(A)=0$ デアル。(Hamilton-Cayley ノ定理)

(定理3) $f(x)$ ヲ x ノ任意ノ整式トシ、A ノ特有根ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ トスレバ、$f(A)$ ノ特有根ハ、$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ デアル。(Frobenius ノ定理)

以上ノ三定理ヲ統一的ニ証明シテ見ヨウ。証明ハ記述ノ簡単ノ為ニ二次ノ行列ノ場合ニツイテ証明スル。一般ノ n 次ノ行列ノ場合モ全ク同様デアル。

(Lemma) $f(x)$ ヲ x ノ巾級数 $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n+\cdots$ トシ、A ヲ二次ノ行列、且ツソノ特有根ヲ λ_1, λ_2 トスレバ

$$\begin{cases} f(A) \quad \dfrac{f(\lambda_1)-f(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}A+\dfrac{\lambda_1 f(\lambda_2)-\lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}E \quad (\lambda_1\neq\lambda_2 \text{ ナルトキ}) \\ f(A)=f'(\lambda)A+\{f(\lambda)-\lambda f'(\lambda)\}E \qquad (\lambda_1=\lambda_2=\lambda \text{ ナルトキ}) \end{cases}$$

(証明) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ トシ $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ トオク、

スルト $A^{n+1}=A^nA$ ナルコトカラ

$$\begin{cases} a_{n+1}=aa_n+cb_n \quad \cdots\cdots\cdots(1) \\ b_{n+1}=ba_n+db_n \quad \cdots\cdots\cdots(2) \\ c_{n+1}=ac_n+cd_n \quad \cdots\cdots\cdots(3) \\ d_{n+1}=bc_n+dd_n \quad \cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

(1).(2) ヨリ $\quad a_{n+2}-(a+d)a_{n+1}+\Delta a_n=0$

(但シ $\Delta=\delta(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$)

コノ回帰公式ヨリ a_n ヲ決定スルニハ、ヨクヤルヤウニ

巾級数 $a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}+\cdots$ ヘ

$1-(a+d)x+\Delta x^2$ 〔コハ $(1-\lambda_1x)(1-\lambda_2x)=$ 等シイ!〕ヲカケ

ルコトニヨリ：回帰公式ヲ用ヰテ 結局

$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}+\cdots=\dfrac{a-\Delta x}{(1-\lambda_1x)(1-\lambda_2x)}$ ヲ得ル。

先ヅ $\lambda_1\neq\lambda_2$ ナル場合カラ論ズル。

コノトキハ、右辺ノ分数式ヲ部分分数ニ分ケ、ソレカラ巾級数

ニ展開シ、左右両辺ノ相当項ノ係数ヲ相等シトオキ $\Delta=\lambda_1\lambda_2$

ナル関係ヲ用キレバ結局

$$a_n=\frac{a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)+(\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_2\lambda_1^n)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

(1),(2),(3),(4) ヨリ全ク同様ニシテ

$$f_n = \frac{b(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$c_n = \frac{c(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$d_n = \frac{d(\lambda_1^n - \lambda_2^n) + (\lambda_1\lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

以上ニヨリ A^n ノ形ハ判ツタカラ、之ヲ $f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots\cdots + \alpha_n A^n + \cdots\cdots$ ヘ代入スレバ結局 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ナルトキハ

$$f(A) = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} E$$

トナル。

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ナルトキハ 上式ニ於テ、$\lambda_1 \to \lambda_2$ ナラシムレバヨイ。 （証明了）

コノ *Lemma* ノ証明ガ出来レバ、前述ノ三定理ノ証明ハ容易デアル。

<u>定理1ノ証明</u> *Lemma* ヨリ明カ。

<u>定理2ノ証明</u> $D(x)$ ヲ行列 A ノ特有整式トシ $f(x)$ ヲ二次ノ任意ノ整式、$x^2 + \beta x + \gamma$ トスル。〔$f(x) - D(x)$ トシテモヨイ〕

又、A ノ特有根ヲ λ_1, λ_2 トスル。

$f(x)$ ヲ $D(x)$ デ割レバ商ハ1トナリ、剰余 $R(x)$ ハ

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ ナルトキハ } \dfrac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \dfrac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ ナルトキハ } f'(\lambda)x + (f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)) \end{cases}$$

トナル。即チ $f(x) = D(x) + R(x)$

コノ式ニ於テモノトコロヘ Aトオケバ

$$f(A) = D(A) + R(A)$$

サテ Lemma ニヨリ下段 $f(A) = R(A)$ ダカラ

$$D(A) = 0$$

定理3ノ証明 Lemma ヲ使ヘバ計算ニヨリ容易ニ証サレル。以上ハ 二次ノ行列ノ場合ニツイテ証明シタガ、n次ノ場合モ全ク同様ニ証サレル。タダ Lemma ニ於テ $f(A)$ ノ形ガ二次ノ場合ハ $f(x)$ ヲAノ特有整式 $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ デ割ッタトキノ剰余（高々一次）トナッタガ、n次ノ場合ハ $f(A)$ ノ形ハ、$f(x)$ ヲAノ特有整式（n次）デ割ッタトキノ剰余（高々$n-1$次）トナル迄デアル。

（完）