



Title	面積ノ概念ニ基ズク空間ノ幾何學
Author(s)	岩本, 秀行
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 266, p. 254-271
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75128
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1195 面積ノ概念ニ基ズク空間ノ幾何學

岩 本 秀 行 (名大)

(10月23日受付)

B. Riemann ハ有名ナ, "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (Habilitationsschrift 1854: Gött. Abh. 13. 1868; Gesammelte Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, S. 272)" = 於テ Euclid 空間ノ自然ナ拡張トシテ、 n 次元ノ数空間 Ω^n ノ隣接スルニ点 $(x^1, \dots, x^n)$, $(x^1+dx^1, \dots, x^n+dx^n)$ 間ノ距離ヲ 場所ノ函数トシテ *a priori* = 与ヘラレタ正值二次形式

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

ヲ用ヒテ定義スル思想ヲノベ, 所謂 Riemann 空間ヲ創造シタ。其後 P. Finsler ハ Riemann 空間ヲ更ニ擴張シタ (P. Finsler, Dissert., Göttingen, 1918). Finsler ノ与ヘタノハ、 Ω^n ノ中ニ *parameter* t ヲ用ヒテ画カレタ曲線 $x^i(t)$ ノ長サガ, $\frac{dx^i}{dt}$ = 関スル一次同次函数 $F(x, \frac{dx}{dt})$ ヲ用ヒテ

$$S = \int F(x, x') dt.$$

ノ形デアタヘラレル空間デアル。E. Cartan, ハコノ標ナ空間ノ幾何學化ノ向類ヲ解決シタ (E. Cartan, des espaces de Finsler, 1934)。

コノ標ナ考ヘヲ更ニ集メテ, "曲線ノ長サ"ノ代リニ、 K 次元

測度”ノ概念ヲ基礎ニトツテモ同ジ様ニ幾何学が構成サレナイ
 カトイフ問題が自然ニ起ル。即チ n 次元空間ニ K 次元曲面 Σ^k
 $= \Sigma^k(u^1, \dots, u^k)$ が与ヘラレタトキ、ソノ上ノ或ル領域
 Ω ノ面積が積分不変量

$$0 = \int_{\Omega} \omega(d), \quad \omega(d) = L\left(\Sigma^k, \frac{\partial \Sigma^k}{\partial u^i}\right) du^1 \dots du^k$$

デアタヘラル空間ノ幾何学デアル *Cartan* ノ *Finsler* 空間ト丁
 度 *dual* + 関係ニアル場合即チ $K = n-1$ ノ場合ヲ論ジタ (*E.*

Cartan, des espaces metriques fondees sur la notion
d'aire 1933) *Cartan* ノ方法トイフノハ函数 F 或ハ L カ
 ラ *Riemann* 空間ノ基本 *tensor* ノ拡張ニ相当スル

Tensor g_{ij} ヲ自然ニ導キ、之ヲ用ヒテ *Euclid* 接続ヲ極メ
 テ巧妙ナ方法ヲ決定スルノデアアルガ、一般ノ場合ニハ問題ハ非
 常ニ困難ナル、河口、穂川両博士ハ $(n, k) = 1$ ノ場合ヲ論ゼ
 ラレ、又最近河口博士ハ $(n=5, k=2)$ ノ場合ノ基本テン
 ザルヲ決定サレタ。

(*Proc. Imp. Acad.* 1940 テンゾル第六号 1943)

本論文ノ目的ハ (I) = 於テ *Riemann* 空間ニ於ケル K 次元
 測地的集合体ヲ、我々ノ考フル一般ノ場合ニ定義シテ、之ヲ用
 ヒテ我々ノ空間ニ接続ヲ導入スルコト、(II) = 於テ基本テン
 ザル $g_{ij}(\Sigma, \frac{\partial \Sigma}{\partial u^i})$ ヲ自然ニ定義シ得ル爲ノ条件ヲ求メルコトデ
 アリマス、ソノ爲 (1) = 於テハ二組ノ添字 $(i_1, \dots, i_k) (j_1, \dots, j_k)$ ノ
 各々ニ關シ交代デ、此等ノソノマ、入レカヘテモ不変ト量

$i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K$ ヲ, $L, \frac{\partial x}{\partial u} =$ 関スルニ因リ偏導函数ヲ
用ヒテ組立テ得ル事ヲ示シ、之カヲ K -vector / Euclid 接
続ヲ定義シ、之ヲ用ヒテ Riemann 空間ニ於ケル Euler-
Schanten tensor

$$N_{\lambda\mu}^i = (\delta_j^i - p_j^i) p_{\lambda\mu}^j + \Lambda_{\lambda\mu}^i(x, p)$$

ヲ定義シマス (II) = 於テ更ニ

$$g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K} = g(i_1, j_1, \dots, i_K, j_K)$$

ナル如キ tensor g_{ij} ノ存在ヲ假定シ、コノ様ナ tensor ガ
若シ存在スルナラバ唯一ツニ限ルコトヲ證明シ、之ヲ用ヒテ
Euclid 接続ヲ導キ、部分空間ノ理論等ヲ簡單ニノズマス。

以下スベテ次ノ記法ヲ用ヒマス。

$$i, j, k = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda, \mu, \nu, \dots; \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, K$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda} = p_\lambda^i, \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} = p_{\lambda\mu}^i, \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda^i} = \Phi_{,i}^\lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \Phi_{,i}$$

$$p_j^i = p_\lambda^j p_i^\lambda, \quad p_i^\lambda = L^{-1} L_i^\lambda,$$

$$q_j^i = \delta_j^i - p_j^i$$

(I)

1° K -基本テンソル $g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K}$ ノ決定

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

ヲ定義サレタ n 次元 Riemann 空間ノ中ニ K 次元ノ曲面 $x^i = x^i(u^\lambda)$ ヲトリ
 $g_{\lambda\mu} = p_\lambda^i p_\mu^j g_{ij}, \quad g = |g_{\lambda\mu}|$ トオケバ曲
面上ノ領域 Ω ノ面積ハ

$$0 = \int V_{\bar{j}} du^{\bar{1}} \dots du^{\bar{k}}$$

デ与ヘラレ、上ノ空間ノ特別ノ場合トナル、今

$$i_1 \dots i_k = k! p_{[i_1}^{\bar{1}} \dots p_{i_k]}^{\bar{k}}, g_{\bar{i}_1} \dots \bar{i}_k, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_k \\ = g_{[i_1, i_{k-1}]} \dots g_{i_k]} \bar{j}_k \quad \text{トナル。}$$

$$g = g_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k} p^{\bar{i}_1} \dots p^{\bar{i}_k} p^{\bar{j}_1} \dots p^{\bar{j}_k}$$

次ニ Cartan 空間デ $p^{\bar{i}_1} \dots p^{\bar{i}_{n-1}}$ ヲ一ツノ重サノアル共
変ベクトルト考ヘ、之ヲ U ニトスレバ $L(x, \frac{\partial x}{\partial u})$ ハ x ト u ノミ
ノ函数トナル。之ヲ更メテ $L(x, u)$

トカキ

$$a^{\bar{i}\bar{j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_{\bar{j}}}$$

トオケバ

$$L = \sqrt{a^{\bar{i}\bar{j}} u_i u_{\bar{j}}} \quad \text{トナル}$$

我々ノ第一ノ目標ハ上ノ $g_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_k, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_k}$ 或ハ $a^{\bar{i}\bar{j}}$ = 相当
スル量ヲ一般ノ場合ニ定義シヤウトイフノデアル。

Riemann 空間ニ於テ

$$(*) \quad \frac{\partial^{2k} L^2}{\partial p_{[i_1}^{\bar{1}} \dots \partial p_{i_k]}^{\bar{k}} \partial p_{[j_1}^{\bar{1}} \dots \partial p_{j_k]}^{\bar{k}}} = 5g_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_k, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_k} \\ \quad \quad \quad (5 \text{ ハ 現ニ正数})$$

トオケバ $g_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_k, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_k}$ ハ上ニ定義シタ $g_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_k, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_k}$ ト一
致スル、又 Cartan 空間ニ於テモ、之ヲ反変相対 tensor
ト考ヘテ $a^{\bar{i}\bar{j}}$ トオケバ、之ハ上ノ $a^{\bar{i}\bar{j}}$ ト一致スル以下 Cartan
空間ニツイテコノコトヲ証明ショウ。

φヲ径数変換=対シ一荷ノスカラースレバ

$$\phi_{i_1}^{\lambda_1} p_{\mu_1}^{\lambda_1} = \delta_{\mu_1}^{\lambda_1} \phi$$

$$\phi_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2} p_{\mu_1}^{\lambda_1} = \delta_{\mu_1}^{\lambda_1} \phi_{i_2}^{\lambda_2}$$

.....

$$\phi_{i_1 \dots i_{\alpha} i_{\alpha+1}}^{\lambda_1 \dots \lambda_{\alpha} \lambda_{\alpha+1}} p_{\mu_1}^{\lambda_1} \dots p_{\mu_{\alpha}}^{\lambda_{\alpha}} = \delta_{\mu_1}^{\lambda_1} \dots \delta_{\mu_{\alpha}}^{\lambda_{\alpha}} \phi_{i_{\alpha+1}}^{\lambda_{\alpha+1}}$$

が成立スル $\alpha \leq K$ ナラ右辺ハ恒等的=0デアル。コノ事實デ

$L_{i_1 \dots i_K}^{(j_1 \dots j_K)} = \text{対シテ用フレバ}$

$$g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K} \cdot \frac{1}{h} p_{j_1}^{\lambda_1} \dots p_{j_K}^{\lambda_K} = 0 \quad \text{又} \quad g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K} p_{j_1}^{\lambda_1} \dots p_{j_K}^{\lambda_K} = L^2 \quad \text{モ殆ド同様=証明出来ル。}$$

$$K = n-1 \quad \text{ナラ}$$

$$a^{ij}, \frac{1}{h} u_j = 0$$

或ハ

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_k^{\lambda}} u_j = 0,$$

$$L. \text{Bernwald} = \exists \text{レバ} \quad \frac{\partial u_k}{\partial u_k^{\lambda}} = u_k p_k^{\lambda} - u_k p_k^{\lambda} \text{ ナカラ}$$

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} u_k = 0$$

$$= \exists \text{ 1) } \quad \frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} p_k^{\lambda} u_j = 0, \text{ 即チ } \frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} p_k^{\lambda} u_j = 0$$

$$\text{コノナラ} \quad u_i u^j + p_i^j = \delta_i^j, \quad \text{ヲ利用スレバ}$$

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} u_k = 0$$

$$\text{之ト} \quad i = \sqrt{a^{ij} u_j} \quad \exists \text{ 1) } \quad a^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u^i \partial u^j}$$

従ツテ(昔)デ $g_{i_1, \dots, i_K, j_1, \dots, j_K}$ ヲ定義シテモヨイ / デアルガ、
之ハ函数 L ノ $2K$ 回ノ偏微分ヲ含ンデキル、以下デハ適當ナ
modification デ唯ニ回ノ微分シカ含マヌモノヲツクリ得
ルコトヲ示ス。

Rieman 空間或ハ Cartan 空間デハ次ノ等式が成立ス
ル。

$$L_{ij}^{(\lambda, \mu)} = 2L^{-1} L_i^{(\lambda)} L_j^{(\mu)}$$

$$L^2 = 2F \quad \text{トオケバ}$$

$$F_i^{\lambda} = L L_i^{\lambda}$$

$$F_i^{(\lambda, \mu)} = L_i^{(\lambda)} L_j^{(\mu)} + L L_i^{(\lambda, \mu)} = 3 L_i^{(\lambda)} L_j^{(\mu)}$$

$$F_i^{(\lambda, \mu)} L_k^{\nu} = 3 L_k^{\nu} L_i^{(\lambda)} L_j^{(\mu)} + 3 L_i^{(\lambda)} L_j^{(\mu, \nu)}$$

従ツテ $F_i^{(\lambda, \mu)} L_k^{\nu}$ ハ又 $L_i^{(\lambda)} L_j^{(\mu)} L_k^{\nu}$ ノ整数倍ニナル、ユノ操
作ヲツツケテエケバ結局 $F_{i_1, \dots, i_K}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_K)}$ ガ $L_{i_1, \dots, i_K}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_K)}$ ノ整
数倍ニナル、従ツテ

$$N F_{i_1, \dots, i_K}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_K)} = L^{2-K} L_{i_1, \dots, i_K}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_K)}$$

従ツテ $F_{i_1, \dots, i_K}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_K)} L_{j_1, \dots, j_K}^{(\mu_1, \dots, \mu_K)}$ ハ $L_{i_1, \dots, i_K}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_K)} L_{j_1, \dots, j_K}^{(\mu_1, \dots, \mu_K)}$ ノ形ノ量
ノ積ノ和ニナル。

$$M L_{i_1, \dots, i_K}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_K)} = \frac{\partial}{\partial p_{\lambda}} L_{j_1, \dots, j_K}^{(\mu_1, \dots, \mu_K)} \quad \text{デアルカラ結局}$$

$g_{i_1, \dots, i_K, j_1, \dots, j_K}$ ハ $L, L_i^{\lambda}, L_i^{\lambda, \mu}$ ノ或ル整係数 *Polynomial*ニナルコトガ分ル即チ

$$g_{i_1, \dots, i_K, j_1, \dots, j_K} = P_{i_1, \dots, i_K, j_1, \dots, j_K}(L, L_i^{\lambda}, L_i^{\lambda, \mu})$$

我々ハ一般ノ場合ニ於テモ上ノ $P_{i_1, \dots, i_K, j_1, \dots, j_K}$ ヲ以テ、

$g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K}$ を定義シヨウトイフノデアル、カタスルモ
関係式

$$A I \quad L^2 = g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K} p^{i_1 \dots i_K} p^{j_1 \dots j_K}$$

$$A II \quad g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda} p^{j_1 \dots j_K} = 0$$

ハ成立スル、結局 $A I, A II$ を満足スル $g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K}$ が、
 L ノ二回 (三回) ノ偏導函数ノ存在ノ假定ノ下ニ定義出来タワ
ケデアル。

我々ハ更ニ $g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K}$ ノ *inverse system*
ガ存在スルコトヲ假定シ、又二次形式 $g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K}$
 $x^{i_1 \dots i_K} x^{j_1 \dots j_K}$ ガ正值ナルコトヲ假定スル又 $g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K}$
ノ行列式ヲ $g^{(n-1)}$ ($g > 0$) トカクコトニスル。

2° K -Euclid 接続

次ニ K -vector ノ接続ヲ

$$D v^{i_1 \dots i_K} = d v^{i_1 \dots i_K} + \omega_{j_1 \dots j_K}^{i_1 \dots i_K} (d) v^{j_1 \dots j_K}$$

$$\omega_{i_1 \dots i_K}^{j_1 \dots j_K} (d) = \Gamma_{i_1 \dots i_K, k}^{j_1 \dots j_K} dx^k + C_{i_1 \dots i_K, \lambda}^{j_1 \dots j_K} d p_{\lambda}^{\lambda}$$

ヲ定義スル。接続ガ Euclidian ダト假定スレバ、

$$g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda}^{\lambda} = C_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda}^{\lambda} + C_{j_1 \dots j_K, i_1 \dots i_K, \lambda}^{\lambda}$$

$$g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, k} = \Gamma_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, k} + \Gamma_{j_1 \dots j_K, i_1 \dots i_K, k}$$

$$\text{但シ } C_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda}^{\lambda} = g_{j_1 \dots j_K, k_1 \dots k_K} C_{i_1 \dots i_K, k_1 \dots k_K}^{\lambda}$$

$$\Gamma_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, k} = g_{j_1 \dots j_K, k_1 \dots k_K} \Gamma_{i_1 \dots i_K, k_1 \dots k_K}^{\lambda}$$

$$\text{トスル。 } C_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda}^{\lambda} = C_{j_1 \dots j_K, i_1 \dots i_K, \lambda}^{\lambda}$$

ナル條件ヲオケバ

$$C_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda} = \frac{1}{2} g_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda}$$

トナル。次ノ關係が成立スル。

$$A II', \quad C_{i_1 \dots i_K, j_1 \dots j_K, \lambda} p^{j_1 \dots j_K} = 0$$

3° 基接続

$$p^{i_1 \dots i_K} \text{ノ共変微分ハ } A II' = \equiv 1$$

$$D p^{i_1 \dots i_K} = d p^{i_1 \dots i_K} + \Gamma_{j_1 \dots j_K, \lambda}^{i_1 \dots i_K} p^{j_1 \dots j_K} d x^\lambda - d(\log F) \cdot p^{i_1 \dots i_K}$$

$$\text{今 } \delta p_\lambda^i = (\delta_{j_1}^i \dots p_{j_1}^{i_1} \dots p_{j_2}^{i_2} \dots p_{j_{K-1}}^{i_{K-1}} \dots p_{j_K}^{i_K}) D p^{i_1 i_2 \dots i_K}$$

トオケバ δp_λ^i ハ $p_i^\lambda \delta p_\mu^i = 0$ ヲ満足シ、

$$\delta p_\lambda^i = (\delta_{j_1}^i \dots p_{j_1}^{i_1} \dots p_{j_2}^{i_2} \dots p_{j_{K-1}}^{i_{K-1}} \dots p_{j_K}^{i_K}) d p_\lambda^j + \Lambda_{\lambda j}^i d x^\lambda$$

ノ形トナル。之ヲ基接続ヲ定義スルコトが出来ル。

$$W_{j_1 \dots j_K}^{i_1 \dots i_K}(d) = \Gamma_{j_1 \dots j_K, \lambda}^{* i_1 \dots i_K} d x^\lambda + C_{j_1 \dots j_K, \lambda}^{i_1 \dots i_K} \delta p_\lambda^j$$

トスレバ

$$\Gamma_{j_1 \dots j_K, \lambda}^{* i_1 \dots i_K} \text{ハ Riemann 空間ノ}$$

$$\Gamma_{j_1 \dots j_K, \lambda}^{i_1 \dots i_K} = \sum_{\alpha} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \{ \delta_{j_2}^{i_2} \} \dots \delta_{j_K}^{i_K}$$

ト同一ノ変換ヲスル、之ヲ決定スル方程式ヲツクルハ普通

ノ Euclid 接続ノ場合ト殆ンド同様ノ條件ヲオケバヨイ。

4° K次元測地的集合体

$$N_{\lambda \mu}^i = (\delta_{j_1}^i \dots p_{j_1}^{i_1} \dots p_{j_2}^{i_2} \dots p_{j_{K-1}}^{i_{K-1}} \dots p_{j_K}^{i_K}) p_{\lambda \mu}^j + \Lambda_{j \lambda}^i p_\mu^j$$

トオク $N_{\lambda \mu}^i$ ハ丁度 Riemann 空間或ハ Cartan 空間

ニ於ケル Euler-Schoutenノ tensorノ拡張ナル、ソ

ニテ

$$N_{\lambda\mu}^i = 0$$

解ヲK次元ノ測地的集合体トイフコトニスル。コレハ一般
 =ハ積分不可能デ、唯幾何学的=ハ各点デ一次! plane
 element = 二次 plane element ヲ対応サセル
 operation ヲ表ハスト考ヘネバナラナイ

サテ次ノ如キ函数 $H_{\lambda\mu}^i(x, p)$ ヲ求メルコトが出来ル。

$$N_{\lambda\mu}^i = (\delta_j^i - p_j^i)(p_{\lambda\mu}^j + H_{\lambda\mu}^j)$$

$$\frac{\partial H_{\lambda\mu}^j}{\partial p_\mu^k} p_\nu^k = \delta_\lambda^\nu H_{\mu\nu}^j + \delta_\mu^\nu H_{\lambda\nu}^j$$

ソレ=ハ例ヘバ $H_{\lambda\mu}^i$ トシテ $\Lambda_{\lambda\mu}^i$ ヲトレバヨイ。上ノ標+ $H_{\lambda\mu}^i$
 ガニツアルトスレバ必ズ $H_{\lambda\mu}^i = H_{\lambda\mu}^i + \varphi_{\lambda\mu}^i p_\nu^i$ ナル関係ガア
 ル $\varphi_{\lambda\mu}^i$ ハ (x, p) ノミノ函数デアル。之カラ Thomas
 Projective Parameter = 相当スル量ヲ求メルコトが出来
 ル即チ

$$\pi_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \Gamma_{k\ell}^{\ell} + \delta_k^i \Gamma_{j\ell}^{\ell}) - \frac{1}{n-k}(\Gamma_{j\ell k}^{\ell} - \frac{\ell}{n-1} \Gamma_{k\ell j}^{\ell}) p_\ell^i \quad (\text{J. Douglas Mat. Ann 1931})$$

$$\text{ソコデ } \gamma_{jk}^i = \pi_{jk}^i + \delta_j^i g_k^* + \delta_k^i g_j^*, \quad \frac{\partial}{\partial x^j} d x^i = g_i^* d x^j + g_j^i \delta x^i$$

トオケバ 之デ共変微分

$$\delta v^i = d v^i + \gamma_{jk}^i v^j d x^k$$

ガ定義サレル。

之係数ハLノ6回ノ偏微分ヲ含ンデキル。

或ハ $w_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}(d)$ カラ普通ノ接続 $w_j^i(d)$

$$\omega_j^i(d) = \frac{K(K-1)\cdots 3\cdot 2}{(n-K)\cdots(n-2)} \omega_{\bar{j}i_2\cdots i_K}^{i_1i_2\cdots i_K} - \frac{((p-1)!)^2}{(n-p)\cdots(n-1)} \delta_{\bar{j}}^{i_1} \omega_{i_1\cdots i_K}^{i_1\cdots i_K}$$

ト求メル事が出来ル。(H. Hombu, Proc. Imp. Acad. 1936)

之ハシノ三回ノ偏微分マデヲ含ム

II.

1° 基本テンソル $g_{ij}(\tau, p)$ ノ決定

次ニ

$$A_{III}. g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K} = g_{[i_1|j_1|\cdots g_{i_K]j_K}$$

ナル如キ二次形式 g_{ij} ノ存在ヲ要求スル。コノ様ナ g_{ij} ハ若シ存在スレバ唯一ツニ限ル。即チ

n 次元 Affin 空間デ基本テンソル $g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K} = \exists$ ニ定義サレタ K 次元体積ガ或ル Pythagorean metric = 基ズクモノデアレバソノ様ナ metric ハ唯一ツニ限ル。

之ハ次ノ如ク証明サレル。考フル n 次元 Affin 空間 = $n-1$

コノ vector,

$$\begin{aligned} O_{(1)} & (a_{(1)}^1, \cdots, a_{(1)}^n) \\ & \cdots \cdots \cdots \\ O_{(n-1)} & (a_{(n-1)}^1, \cdots, a_{(n-1)}^n) \end{aligned}$$

ヲトル。而シテ

$$P_{\lambda_1\cdots\lambda_K, \mu_1\cdots\mu_K} = g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K} a_{\lambda_1}^{i_1} \cdots a_{\lambda_K}^{i_K} a_{\mu_1}^{j_1} \cdots a_{\mu_K}^{j_K}$$

トオキ, $P_{\lambda_1\cdots\lambda_K, \mu_1\cdots\mu_K}$ / $(\lambda_1\cdots\lambda_K), (\mu_1\cdots\mu_K)$ ヲ夫ノ縦横ニ並ベテ出来ル行列ノ行列式ヲ $\Delta(O_{(1)}\cdots O_{(n-1)})$ トスルハ

$$a_{(1)}^{i_1} \cdots a_{(n-1)}^{i_{n-1}} \quad \text{ヲ 共変相対ベクトルト考ヘテ之ヲ } (a_i)$$

トオケバ

$$\Delta(a_1, \dots, a_{n-1}) = (g^{ij} a_i a_j)^{\binom{n-1}{k-1}}$$

トナル、 $(a_1, \dots, a_n)$ ハ独立変数ト考ヘラレルワテ之デ定理
ハ證明サレタノデアル。

2° Euclid 接線ノ導入

Cartan = 従ッテ Ω^n ノ各 plane element (x, p) = 対
シ切 Euclid 空間 $E^n(x, p)$ ガ對應シテナルモノトスル。

$E^n(x, p)$ ノ中 = 自然標高 $\{e_1, \dots, e_n\}$ ヲトル然ラバ

1° Ω_n , 一点 M ヨリ $M + dM$ へノ微小移動ガ

$$dM = e_i dz^i$$

デ表ハサレ

$$2^\circ \quad ds^2 = (dM, dM) \quad \text{或ハ} \quad (e_i, e_j) = g_{ij}$$

$E^n(x+dz, p+dp)$ ∇ $E^n(x, p)$ = 移ス無限小 Euclid

変換即チ接線ヲ

$$de_i = \omega_i^{\bar{j}}(d) e_{\bar{j}},$$

$$\omega_i^{\bar{j}}(d) = \Gamma_{ik}^{\bar{j}} dz^k + C_{ik}^{\bar{j}\lambda} \delta p_\lambda^k$$

デ定義スル $\Gamma_{ik}^{\bar{j}}$, $C_{ik}^{\bar{j}\lambda}$ ハ次ノ如ク決定サレル。

$$C_{\bar{j}k}^{\bar{i}\lambda} = \frac{1}{2} g^{\bar{i}k} g_{\bar{h}j, k}^{\lambda}$$

$$\Gamma_{\bar{j}k}^{\bar{i}} = \frac{1}{2} g^{\bar{i}k} \{ g_{\bar{h}k, j}^* + g_{\bar{h}j, k}^* - g_{\bar{j}k, h}^* \}$$

$$\text{茲} = dg_{ij} = g_{ij, k}^* dz^k + g_{ij, k}^{\lambda} \delta p_\lambda^k \quad \text{トスル}$$

コノ $\omega_{ij}^{\bar{j}}$ ヲリ

$$\omega_{i_1 \dots i_k}^{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_k}(d) = \sum_{\alpha} \delta_{i_1}^{\bar{j}_1} \dots \omega_{i_k \alpha}^{\bar{j}_k} \dots \omega_{i_k}^{\bar{j}_k}$$

ヲツクレバソレハ (I) デ定義シタ K-接線ト一致スル。

3° $L_i^{\lambda} C_{ij\bar{k}}^{\lambda} \Gamma_{j\bar{k}}^i$ ノ性質

次ノ諸関係が成立スル。

$$AIV. \quad L^{-1} L_i^{\lambda} = g_{ij} g^{\lambda\mu} p_{\mu}^{\bar{j}}$$

$$AV. \quad (\delta_j^i - p_j^i) p_{\lambda}^k C_{i\bar{k}\bar{k}}^{\lambda} = 0$$

$$AVI. \quad p_{\mu}^i p_i^{\mu} C_{j\bar{k}}^{\lambda} = 0$$

$$AVII. \quad g_{ij}^{\bar{j}} p_{\bar{k}}^{\lambda} p_{\lambda}^k \Gamma_{j\bar{k}}^i = g_{ij}^{\bar{j}} L^{-1} L_{\bar{j}}$$

先ヅ AI, AII カラ

$$\frac{\partial L}{\partial p_{\lambda}^i} = L^{-1} g_{i, \dots i_k, j_1 \dots j_k} p^{i, \dots i_k} \frac{\partial p^{j_1 \dots j_k}}{\partial p_{\lambda}^i}$$

$$L = \sqrt{|p_{\lambda}^i p_{\mu}^{\bar{j}} g_{ij}|} \quad \text{ヲ用ヒテ變形スレバ}$$

$$= L^{-1} |g_{ij}^{\bar{j}} p_{\mu}^i \frac{\partial p^{j_1 \dots j_k}}{\partial p_{\lambda}^i}| \quad (\mu, \nu) = \text{偶スル行列式}$$

$$= L g_{ij}^{\bar{j}} g^{\lambda\mu} p_{\mu}^{\bar{j}}$$

次ニ AV ノ證明 AII' ハ幾何学的ニハ次ノコトヲ意味スル。

曲面上ノ (x) 一於ケル切平面 (p) ヲ $E^n(x, p + dp)$ ノ平面ト考ヘルトキ之ニハ接線ノ意味デ $E^n(x, p)$ ノ手面が對應スルソ

1 平面ハヤハリ (x) デ曲面 = 切スル。

換言スレバ (p_λ^i) ナル vector ヲ $E^n(x, p+dp)$ 1 vector
ト考ヘタトキ、之ニ對應スル $E^n(x, p)$ ノベクトルハ (x) =
於テ曲面 = 切スル、即チ切平面 = 垂直ナ空間 = 垂直デア
ル
換言スレバ

$$(\delta_i^j - p_\lambda^j) p_\lambda^k C_{ik}^\mu = 0$$

之ハ勿論式：計算カラモ出ル。

AVI ハ AIV カラ出ル。

$$g_{ij}^j p_k^\lambda p_\lambda^k \Gamma_{jk}^k = g_{ij}^j p_k^\lambda p_\lambda^k (\Gamma_{jk}^k - C_{jk}^{\lambda\lambda} \Lambda_{\lambda k}^j)$$

$$= g_{ij}^j p_k^\lambda p_\lambda^k (\Gamma_{jk}^k - C_{jk}^{\lambda\lambda} \Lambda_{\lambda k}^j)$$

$$= g_{ij}^j p_k^\lambda p_\lambda^k \Gamma_{jk}^k = L^{-1} g_{ij}^j \frac{\partial L}{\partial x_j} \quad \text{即チ VII}$$

4' 部分空間ノ理論

p_λ^i ヲ曲面 = 沿フテ共変微分スレバ

$$D_\mu p_\lambda^i = p_{\lambda\mu}^i + \Gamma_{jk}^i p_\lambda^j p_\mu^k + C_{jk}^{i\lambda} p_\lambda^j p_\mu^k$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^i = p_\lambda^i D_\mu p_\lambda^i = p_\lambda^i (p_{\lambda\mu}^i + \Gamma_{jk}^i p_\lambda^j p_\mu^k + C_{jk}^{i\lambda} p_\lambda^j p_\mu^k)$$

ハ普通ノ意味デ曲面上 = induce サレタ接続ヲ与ヘル、之
ハ Euclidian デアルガ一般ニ振率ヲモツ。

K 次元曲面ハ $ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu$ ナル metric ノ与ヘラレ
タ Riemann 空間ト考ヘルコトガ出来る。曲面上ノ曲線 $x^i(s)$
ニツイテ

$$\frac{dx^i}{ds} = p_\lambda^i \frac{du^\lambda}{ds}$$

ヲ曲線ニ沿フテ共変微分スレバ

$$\frac{\delta^2 x^i}{ds^2} = p_\lambda^i \left(\frac{d^2 u^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} \right) + H_{\lambda\mu}^i \frac{du^\lambda}{ds} \frac{du^\mu}{ds}$$

$$H_{\lambda\mu}^i = (\delta_j^i - p_j^i) (p_{\lambda\mu}^j + \Gamma_{\lambda\mu}^k p_\lambda^k p_\mu^k)$$

トナル $\frac{\delta^2 x^i}{ds^2}$ ヲ曲線ノ絶対曲率ベクトル, $p_\lambda^i \left(\frac{d^2 u^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} \right)$

ヲ相対曲率ベクトル, $H_{\lambda\mu}^i \frac{du^\lambda}{ds} \frac{du^\mu}{ds}$ ヲ法曲率ベクトルトヨブ。

相対曲率ベクトルガ曲線ニ沿フテ恒等的ニ0ナル曲線(自平行曲線)デハ絶対曲率ベクトルハ法曲率ベクトルニ等シク曲面ニ直交スル $H_{\lambda\mu}^i$ ハ前ニ定義シタ $N_{\lambda\mu}^i$ ノノモノデアル。

$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ ノ換率ハ

$$B_{\lambda\mu}^\nu = C_{\lambda k}^\nu H_{\mu\lambda}^k - C_{\mu k}^\nu H_{\lambda\mu}^k \quad \text{トナル。}$$

$$(C_{\lambda k}^\nu = p_\lambda^\nu p_k^\mu C_{\mu\lambda}^\nu)$$

$$g^{\nu\omega} B_{\lambda\mu}^\omega = B_{\lambda\mu}^\nu \quad \text{トオケバ}$$

$$B_0[\lambda\mu\nu] = 0$$

$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ ハ

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \{\lambda\mu\}^\nu + C_{\mu k}^\nu H_{\lambda\mu}^k - C_{\lambda\mu}^\nu H_{\mu\lambda}^k g^{\pi\nu}$$

$$\{\lambda\mu\}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\omega} \left\{ \frac{\partial g^{\omega\lambda}}{\partial u^\mu} + \frac{\partial g^{\omega\mu}}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial g^{\lambda\mu}}{\partial u^\omega} \right\}$$

又次ノ関係ガ成立スル

$$A_{\text{IV}} \quad L \Gamma_{\nu\lambda}^\nu = \frac{\partial L}{\partial u^\lambda}$$

$$\text{変分ノ問題} \quad \delta \int du = 0$$

カヲ次) Euler / 微分方程式ヲ得ル。

$$E_i \equiv \frac{\partial}{\partial u^\lambda} \frac{\partial L}{\partial p_\lambda^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad E_i p_j^i = 0$$

$$E_i = g_{ij}^i E_j = 0$$

$$E_i = g_{ij}^i \left(\frac{\partial}{\partial u^\lambda} (L p_j^\lambda) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) = g_{ij}^i \left(L \frac{\partial p_j^\lambda}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right)$$

$$= g_{ij}^i (p_j^\lambda{}_{,\lambda} - \Gamma_{j\lambda}^\lambda - C_{jk}^{\lambda\lambda} p_{i\lambda}^k) \quad (AV, AVI, AVII = 0)$$

$$= g_{ij}^i D_\mu p_j^\mu = g_{ij} g^{\lambda\mu} D_\mu p_\lambda^i$$

即チ $E_i \equiv g_{ij} g^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu}^i$

$H^i = g^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu}^i$ ヲ平均曲率ベクトルトイフコト = スレバ

K次元曲面ハ平均曲率ベクトルガ曲面ニ沿ツテ恒等的ニ
0ナルトキ = 限り極小曲面デアル。

全測地的曲面ハ極小曲面デアル。

最後 = AIV ヲ再ビ p_μ^i デ微分シテ次ノ関係ヲ得ル。

$$AIX. \quad L_i^{(\lambda)} L_j^{(\mu)} = 2 L^{(\lambda)} L_i^{(\mu)} L_j^{(\mu)}$$

$$AX. \quad L_{ij}^{(\lambda\mu)} = (g_{ij} - p_i^\alpha p_j^\beta g_{\alpha\beta}) g^{\lambda\mu}$$

AX ハ又 $E_i \equiv g_{ij} g^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu}^i$, $p_{\lambda\mu}^i$ ノ係数ヲ比轉シテモ出ル。

之カラ g_{ij} ヲ explicit = 求マルコトガ出来ル。

5° 空間ノ他ノ characterization

上ノ AI, AII ヲ同時ニ admit スル空間ヘ次ノ公理系ヲ満足ス

基本テンソル g_{ij} の存在 = ヨツテ characterize サレル。

$$BI \quad L = \sqrt{|g|} \quad g_{ip} = p^j_\lambda p^i_\mu g_{j\mu}$$

$$BII \quad g_{ij} \cdot p^i_\lambda p^j_\mu = 0, \quad g^i_j = \delta^i_j - g_{ik} g^{kl} p^k_\lambda p^l_j$$

BI, BII カラ

$$BIII. \quad L^i L_i^\lambda = g_{ij} g^{j\mu} p^i_\mu$$

ガ出ル。BIII ヲ p^i_μ デ偏微分シテ BII ヲ適用スレバ

$$BIV. \quad L^{(\lambda\mu)}_{ij} = L^i L_j^\lambda L_j^\mu$$

$$BV. \quad L^{(\lambda\mu)}_{ij} = (g_{ij} - p^k_i p^l_j g_{kl}) g^{\lambda\mu}$$

ガ出ル。BIV BV カラ

$$g_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k} = g_{(i_1 j_1) \dots (i_k j_k)}$$

ガ(I)ノ最初 = ノベタ方法デ構成シタモノト一致スルコトガ分ル
結局 AI, AII, AIII ハ BI, BII ト equivalent トナル。

注意 AIV スハ BV ナル條件ハ一般ノ L デハ不可能デアル。(ソ

レ = ハ條件 AIII ガ新イテクルコト = 注意) 一般 L = ツイ

テ g_{ij} ノ型ノ基本 tensor ヲ定義スル = ハ次ノ様ニ考ヘルノ

ガ自然デハナカラウカ、之ハ矢野先生ノ御注意デアル。対称ナ

tensor g^{ij} ノ次様 = エラブ。

$$1^\circ \quad g^{ij} L_j^\nu = 0$$

$$2^\circ \quad g^{\lambda\mu} = (n-k)^{-1} g^{ij} L^{(\lambda\mu)}_{ij} \quad \text{ノ行列ガ } L^2 = \text{ナル。}$$

$$\text{之カヲ} \quad g^{ij} = g'^{ij} + p_\lambda^i p_\mu^j g^{\lambda\mu}$$

ノ如ク g^{ij} ガ決定サレ、 $|g^{ij}| \neq 0$ ナル限り基本 tensor ヲ定義スル換言スレバ次ノ公理系ヲ満足スル様ニ g^{ij} ヲ定義スルノデアル。

$$\text{CI.} \quad L^2 = |g_{\lambda\mu}|. \quad g_{\lambda\mu} = p_\lambda^i p_\mu^j g_{ij}$$

$$\text{CII.} \quad (n-k) g^{ij} = g^{kl} [(n-k) \delta_k^i \delta_l^j + p_\lambda^i p_\mu^j \binom{\lambda\mu}{(k\ l)}]$$

エノ様ニ g^{ij} ハ g'^{ij} ノトリ方テ変ツテクル、又 AV 又ハ BE ハ必ズシモ成立シナイ、併シ

$$\text{CIII.} \quad L^i L_i^\lambda = g^{ij} g^{\lambda\mu} p_{\mu j}^i$$

ハ成立スル、従ツテ (II) ノ最後ノ定理ハ次ノ形ニナル。

K次元曲面ハ

$$N^i \equiv g^{\lambda\mu} g_{ij}^i (p_{\lambda\mu}^j + \Gamma_{\lambda\mu}^j p_\lambda^k p_\mu^k + C_{\lambda\mu}^{j\ \nu} p_\lambda^k p_\mu^k)$$

ガ曲面上デ0ナルトキニ限り極小極面トナル。

6° 一点ニ於ケル角計量

n 次元 Euclid 空間内ニニツノ K 次元平面 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ ガアルトキ $\mathcal{M}$ 内ニ互ニ垂直ナベクトル $\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(k)}$, $\mathcal{N}$ 内ニ互ニ垂直ナベクトル $\beta_{(1)}, \dots, \beta_{(n-k)}$ ヲ適當ニトリ $\alpha_{(1)}, \alpha_{(n-k)}$ ガ相異ル i, k ニ對シ直交スル様ニ出来ル (談話 1182. Hilbert 空間ノ angular relation = ツイテ参照) $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ ノナス角 θ ハ

$$\cos^2 \theta = \cos^2(\alpha_{(1)} \beta_{(1)}) \dots \cos^2(\alpha_{(n-k)} \beta_{(n-k)})$$

トナル。

今相隣ルニ平面 $(p), (p+dp)$ ヲトル。 $(p+dp)$ ヲ $E_n(xp+dp)$ カ
 ラ $E_n(p)$ へ 平行 = 移シタ 平面ト (p) トノ ナス角ヲ $E_n(x, p)$ /
 中デ測ツタモノヲ $d\theta$, 上ノ (OC_i, DC_i) ノナス角ヲ $d\theta_\lambda$ トスレ
 バ

$$d\theta^2 = \sum_{\lambda} d\theta_{\lambda}^2 = g_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k} D p^{i_1 \dots i_k} D^* p^{j_1 \dots j_k}$$

$$= L^{-1} L_i^{(i)} L_j^{(j)} dp_{\lambda}^i dp_{\mu}^j$$

トナル。

(19. 9. 20)

[談話1181 = 閑スル注意]

2次元ノ球面上ニ円Cガアルトキ、Cノ上ノ四点A, B, C, D
 順序ヲ次ノ如ク定義シヨウ。

C_1, C_2 ヲ夫々 $A, B; C, D$ ヲ過ギル任意ノ円トスルトキ
 常ニ $C_1, C_2 > 0$ ナルトキ A, B ハ C, D ヲ分ツトイフ。

之ニ関シ普通ノ順序ノ公理ガ成立ツテキルトスル。

之カラ出ルユトハ我々ノ *Körper* $\mathcal{K}$ ガ順序ヅケラレテキテ
 シカモソノスベテノ正ノ元ガ平方根ヲモツコトデアアル。ソレハ
 $\mathcal{K} > 0$ ノ平方根ヲ作函スル普通ノ方法ガ可能トナルカラデアアル。

又 $\mathcal{L}_w$ デ、任意ノ円Cノ中心ヲ過ギリ、ソノ円ノ平面上ニ
 アル直線ガ、必ず円ト交ハルコトガ分ル。之ハ実ハ最後ニ $\mathcal{L}_w$
 ガ *Euclid* 空間ナルユトラ証明スル時ニ、ウツカリ使ツタコ
 トデアツタ。