



Title	四元數体ニ於ケル週期函數ノ一定理ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1944, 266, p. 274-280
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75130
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1197 四元数体ニ於ケル週期函数ノ一定理ニ就テ

春 木 博 (神戸高等商船学校)

(10月30日受付)

§ 1. 序

四元数体ニ於テハ、乗法ノ可換律が成立シナイカラ、ソコニ於ケル *Analysis* ハ複素数ニ於ケル如ク円滑ニハユカヌ。モハヤ、一致ノ定理モ、四元数体ニ於テハ、成立シナイ。例ヘバ $f(q) = 1 + q^2$ (q ハ四元数ヲアテハヌ) ハ、 $q = li + mj + nk$ (l, m, n ハ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ナル關係ヲ有スル実数) ヲ零点ニ持ツ。故ニ、一致ノ定理ハ成リ立タナイ。

以下ニ於テ、特殊ナル四元数函数ニツキ、週期性ニ関スル一定理ヲ述ベヤウ。

先ヅ準備トシテ、実数デナイ任意ノ四元数 $q = d + ai + bj + ck$ が次ノ如ク書ケルコトヲ注意スル。 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ナル故

$$q = d + ai + bj + ck = d + \frac{ai + bj + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{ココデ } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \alpha, \frac{ai + bj + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = n(q) \text{ トオケバ}$$

$$q = d + \alpha n(q)$$

ココデ、注意スベキハ $n(q)$ ハ

$n^2(q) = -1$

ナル性質ヲ有スル。之ハ四元数ノ底 i, j, k ノ性質ヨリ 容易ニ

証明ナレル。凡 (q) ハ丁度複素数ニ於ケル虚数單位ノ如キ性質ヲ有スル。コノ性質ハ以下ノ本論ニ於テ使用スル。コノ性質ト後ニ示ス四元数ノ指数函数ノ性質ヲ用ヒレバ、任意ノ四元数 q ハ（複素数ノ極形式ノ如ク） $|q|e^{n(q)\theta}$ ナル形式ニ書ケルガ、本論ニ関係ナイノデ、詳シクハ述べナイ。

§2. 本 論

実係数ヲ有スル四元数 q ノ巾級数

$$f(q) = \alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \cdots + \alpha_n q^n + \cdots$$

ヲ考ヘル。之ガ実数 q ニ対シ、整函数（当然 q ガ複素数ノ時モ整函数）トスレバ容易ニ任意ノ四元数 q ニ対シテモ、収斂スルコトガ判ル。

[定理] 実係数ヲ有スル四元数ノ巾級数（勿論常数ナラザル）

$$f(q) = \alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \cdots + \alpha_n q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n q^n$$

ニ於テ、 q ガ実数ナル時、整函数（当然 q ガ複素数ノ時モ整函数、又 q ガ任意ノ四元数ナル時モ収斂スル）トスル時、四元数ノ函数 $f(q)$ ガ週期 $w = d + ai + bj + ck$ （ $\neq 0$ ）ヲ有スルナラバ（即チ任意ノ四元数 q ニ対シ $f(q+w) = f(q)$ ナラバ）週期 w ハ実数デアール。

（証明）間接法ニ依ル。 w （ $\neq 0$ ）ヲ実数デナイトスレバ§1.ニ於テ述ベタヤウニ、四元数 w ハ次ノ形デ書ケル。

$$w = d + ai + bj + ck = d + \alpha n(w)$$

但シ、 $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (> 0) $n(w) = \frac{ai + bj + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ デ、 $n^2(w)$

= -カヲ デアル。

スルト、 $n^2(w) = -1$ デアルカラ、 $f(q)$ ハ実数 q = 対シ、複素数ノ週期 $w_1 = d + \alpha i$ ($\alpha > 0$) ヲ持ツ。 $f(q)$ ノ展開式ハ、係数が実数デアルカラ、実数 q = 対シ、 $f(q)$ ハ又 $w_2 = d - \alpha i$ ($\alpha > 0$) ナル週期ヲ持ツ。

q が実数ナル時、整函数 $f(q)$ ハ w_1, w_2 ナル週期ヲ持ツカラ、一致ノ定理ニ依リ当然 q が複素数ナルトキモ $f(q)$ ハニツノ週期 $w_1 = d + \alpha i, w_2 = d - \alpha i$ ($\alpha > 0$) ヲ持ツ。以下議論ヲニツノ場合ニ分ツ。

第一ノ場合 $d \neq 0$ ナル時

此ノ時ハ、 $d \neq 0, \alpha \neq 0$ ナル故、複素数ノ範囲ニ於テ、整函数 $f(q)$ ハ独立ナルニツノ週期 w_1, w_2 ヲ持ツカラ、ヨク知ラレタ楕圓函数ニ関スル Liouville ノ第一ノ定理カラ、 $f(q)$ ハ常数トナル。之ハ矛盾デアル。

第二ノ場合 $d = 0$ ナル時、

此ノ時 $f(q)$ ハ q が複素数ナル時、週期 αi ($\alpha > 0$) ヲ持ツ。スルト、 $w = d + ai + bj + ck = ai + bj + ck$ が $f(q)$ ノ週期ナル故、任意ノ四元数 q = 対シ

$$(1) \quad f(q + ai + bj + ck) = f(q)$$

$$(1) = \text{於テ } q \text{ ノ代リ} = q + \alpha i \text{ トオケバ}$$

$$(2) \quad f\{q + (a + \alpha)i + bj + ck\} = f(q + \alpha i)$$

処ガ、 q が任意ノ実数ナル時モ、 $f(q + \alpha i) = f(q)$

之ト(2)トカラ、結局 q が任意ノ実数ナル時

$$f\{z + (a+\alpha)i + b\bar{j} + c\bar{k}\} = f(z)$$

数 = z が実数ナル時、 $(a+\alpha)i + b\bar{j} + c\bar{k} \sim f(z)$ の週期トナル。

数 = 前述ノ論法ヲ繰返セバ、 z が複素数ナル時、

$$\sqrt{(a+\alpha)^2 + b^2 + c^2}i \sim f(z) \text{ の週期トナル。}$$

結局複素数 z ノ整函数 $f(z)$ ノ虚軸上ニツノ週期 αi 、

$$\sqrt{(a+\alpha)^2 + b^2 + c^2}i \text{ ノ持つコトが判ゼキ。}$$

次 = z が複素数ノ時 $f(z)$ ノ整函数デ週期 αi ($\alpha > 0$) ノ有スル数、 z ノ虚軸上、 αi ノ基本週期 (即チ絶対値が最小ノ週期) ニトツテオクコトが出来ル。更ニ $w = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ が週期ナル故、 $-w$ モ亦週期デアルカラ、 $\alpha \geq 0$ ト假定シテモ一般性ハ損ジナイ。

αi が基本週期ナル故 $\sqrt{(a+\alpha)^2 + b^2 + c^2}i \sim \alpha i$ ノ整数倍トナラネバナラヌ。今ノ場合ハ、零倍又ハ正ノ整数倍トナラネバナラヌ。即チ $p = \frac{\sqrt{(a+\alpha)^2 + b^2 + c^2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{(a+\alpha)^2 + b^2 + c^2}}{\alpha}$ トオケバ、 p ハ見ナラザル整数トナル。

トコロガ、

$$\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ ナル故}$$

$$p = \sqrt{2 + \frac{2\alpha}{a}}$$

又、 $\frac{a}{\alpha} \leq 1$ ナル故 $p \leq 2$ 結局 $0 \leq p \leq 2$ 。

コノデ p ハ $0, 1$ ニハナリ得ナイコトハ、スグ判ル。何者、

$p = 0$ トナレバ $a + \alpha = b = c = 0$ 。トコロガ $a \geq 0, \alpha > 0$ ナル故、明ニ矛盾デアル。又、 $p = 2$ トナレバ $\alpha^2 + 2\alpha a = 0$ ト

ナリ、之モ $\alpha > 0$, $a \geq 0$ ナルコトト矛盾スル。

故ニ結局 $p=2$ トナラネバナラナイ。コノ時ハ $b=0, c=0$ トナルカラ $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a (>0)$ トナル。

$b=0, c=0$ ナル故 $w = ai + bj + ck = ai$ トナリ、從ツテ、 q が四元数ナル時、 $ai (a>0)$ ハ $f(q)$ ノ週期トナルコトガ判ツタ。故ニ、任意ノ四元数 q = 対シ

$$(3) \quad f(q + ai) = f(q)$$

$$(3) = \text{於テ } q \text{ ノ代リ} = q + aj \text{ トオケバ}$$

$$(4) \quad f(q + ai + aj) = f(q + aj)$$

トコロガ q が実数値ナルトキハ、勿論 $f(q + ai) = f(q)$ テ、
底 i, j ハトモ $i^2 = -1, j^2 = -1$ ナル性質ヲ具ヘテナルカラ q が実数ナルトキハ $f(q + aj) = f(q)$ トナル。

之ト (4) トヨリ q が実数ナルトキハ $ai + aj$ ハ $f(q)$ ノ週期トナル。即チ $f(q + ai + aj) = f(q)$

スルト以前ノ論法ニヨリ、 q が実数ナル時 $\sqrt{a^2 + a^2}i = \sqrt{2}ai$ ($a > 0$) ナル複素数ハ $f(q)$ ノ週期トナル。一致ノ定理ニヨリ、複素数 q = 対シテモ、 $\sqrt{2}ai$ ($a > 0$) ナル複素数ハ $f(q)$ ノ週期トナル。

故ニ $f(q)$ ハ q が複素数ナルトキ、ニツノ週期 $ai, \sqrt{2}ai (a > 0)$ ヲ持ツ。トコロガ ai ハ基本週期デアルカラ、 $\sqrt{2}ai \cdot ai$ ノ整数倍トナラネバナラヌ。之ハ明ニ矛盾デアル。結局定理ハ証明サレタ。
(証了)

S 3. 應用例

四元数体 = 於ケル 指数函数、正弦函数、餘弦函数ヲ夫々次式
= 依リ定義スル。

$$e^q = \exp(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{n!}$$

$$\sin q = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos q = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{(2n)!}$$

之等ハ何レモ任意ノ四元数 q = 對シ收斂スルコトハ勿論デアル。

先ヅ之等ノ三ツノ函数ノ間ニハ如何ナル關係ガアルカ調べテ
見ルト複素数 = 於ケル Euler ノ公式 = 當ルモノトシテ、次ノ
關係式ハ容易ニ証明サル。

$$\begin{cases} \cos q + n(q) \sin q = e^{n(q)q} \\ \sin q = \frac{e^{n(q)q} - e^{-n(q)q}}{2n(q)} \\ \cos q = \frac{e^{n(q)q} + e^{-n(q)q}}{2} \end{cases}$$

$$\text{更ニ } \sin^2 q + \cos^2 q = 1$$

$$e^q = e^d \left\{ \cos \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + n(q) \sin \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

ノ成立モ容易ニ証明サレル。コゝニ $q = d + ai + bj + ck$

ナリトスル。

次ニ加法定理ハ如何カト云フニ、 $AB = BA$ ナルニツノ四元数

$A, B = \text{対シテハ}$

$$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$$

が容易 = 証明サレルが 一般 = 成リ立タナイ。従ツテ $\sin \theta$
 $\cos \theta$ の加法定理モ一般ニハ成リ立タナイ。

次 = 週期性 = 就イテ云フト、 $\exp(\theta)$ = 就イテハ加法定理が
成リ立タナイ爲 週期 = 闡シテノ爲 察が一寸困難デアルが、上
記ノ定理ヲ用ヒレバ θ が四元数ナルトキハ、週期が存在シナイ
コトが判ル。

更ニ、上述ノ定理ヲ用キレバ $\sin \theta, \cos \theta$ の週期ハ 2
 π = 限ルコトが判ル。

次 = 上述ノ定理ノ証明ニ於テ (1) カラ (2) ヲ導イタ所ト (3)
カラ (4) ヲ導イタ所アタリノ論法ヲ見レバ、容易ニ上記ノ定理ヲ
鑑クシタ次ノ定理が得ラレル。

定理 実係数ヲ有スル四元数ノ巾級数 (勿論常数: ラザル)

$$f(\theta) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + \cdots + a_n \theta^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta^n$$

= 於テ θ が実数ナルトキ整函数 (勿論任意ノ四元数 θ = 対シ
收斂スル) トスル。コノ時、 $a_1 + a_2 i + a_3 j$ ナル形ヲ有ス
ル四元数 θ = 対シ $f(\theta)$ が週期 $\omega = d + a_1 i + a_2 j + c k$ ($c \neq 0$) ヲ持ツナ
ラバ ω ハ実数デアル。但シ a_1, a_2, a_3, c 等ハスベテ実数
ナリトスル。

(完)