



Title	Zo r n ノ 補 題 ノ 整 列 集 合 ヲ 用 キ ナ イ 證 明
Author(s)	入江, 盛
Citation	全国紙上数学談話会. 1945, 267, p. 281-285
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75131
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

Zornノ補題ノ整列集合ヲ用キテノ 證明

入 江 盛 (北大)

(11月20日受付)

Zornノ補題ニ就イテハ位相數學第四卷第1号(50-52頁及ビ74頁)ニ中山正氏ノ解説ガアリマス。

一年目ノ学生ニ講義スル際、整列集合ニ關シテ述ベル前ニ此ノ補題ヲ使ヒタイノテ次ノヤウニ證明シテ見マシタ。方針ハZermeloノ整列可能定理ノ第2ノ證明(Math. Ann. 65. (1908))ト同様デス。

Zornノ補題、「半順序ノアル集合 E ヲ考ヘル、ソシテ E ノ空ナラザル部分集合 F ニ此ノ半順序ノ關係ガ線型順序デアルヤウナモノハ常ニ E ノ中ニ *supremum* ヲ持ツト假定スル。
(此ノ時 E ハ *inductively* ニ順序ヅケラレテキルト言フ)シカルトキ E ニハ極大ナ元ガ必クトモーツ存在スル。」

コレハ次ノ二ツノ補題カラ直チニ得ラレル。

補題1. 「*inductively* ニ順序ヅケラレタ集合 E ヲ考ヘル。 E ヲ E ノ中ヘ寫像スル一価函数ガ E ノ全テノ元 x ニ對シテ $f(x) \geq x$ ヲミタスナラバ必クトモーツ不動元 $f(x) = x$ ガ存在スル」

補題2 「 E ヲ *inductively* ニ順序ヅケラレタ集合トスレバ E ヲ E ノ中ヘ寫像スル一価函数 f デ E ノ全テノ元 x ニ

對シテ $f(x) \cong x$ ヲミタシ、シカモ $f(x) = x$ デアル)

ハ x が E ノ極大元ナルトキニ限ルモノガ存在スル。」

補題2 ハ選擇公理ヲ假定スレバ明カデアル。

補題1 ヲ選擇公理ヲ假定セズ、又整列集合ヲ用ヰナイデ次ニ證明スル。

證明

第1段 集合 E ノ部分集合ヨリナル集合族デ次ノ條件ヲ満足スル M_0 ガ存在スルコトガ證明出来レバ補題1 ノ成立スルコトハ明カデアル。

- (1) $A \in M_0$ デ $\sup(A) = a$ ガ存在スレバ $A \cup \{f(a)\} \in M_0$ 、
- (2) 全テノ $\varphi \in \Phi$ ニツキ $A_\varphi \in M_0$ ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Phi} A_\varphi \in M_0$ 、
- (3) M_0 ノ任意ノ元ニ於テ E ニオケル半順序ノ關係ハ線型順序デアル。

實際 M_0 ニ屬スル全テノ元ノ和集合ヲ M トスレバ、(2) 及ビ(3) ヨリ M ハ線型デアルカラ假定ヨリ $\sup(M) = m$ ガ存在スル。 $f(m)$ ハ(1) ヨリ M ニ屬シ、又假定ヨリ $f(m) \cong m$ デアルカラ $f(m) = m$ デナケレバナラヌ。

第2段 集合族 M_0 ノ存在ヲ示スタメニ Δ -連鎖ナルモノヲ定義スル。

p ヲ E ノキマツタ元トシ、 p ヲ含ム E ノ部分集合ノ族 M ガ次ノ條件(0)、(1) 及ビ(2) ヲ満足スルトキ之ヲ Δ -連鎖ト名ヅケル。

- (0) $\{p\} \in M$ 、

(1) $A \in \mathbb{M}$ デ $\sup(A) = a$ が存在スレバ $A \vee \{f(a)\} \in \mathbb{M}$.

(2) 全テノ $\varphi \in \Xi$ ニツキ $A_\varphi \in \mathbb{M}$ ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Xi} A_\varphi \in \mathbb{M}$.

Δ -連鎖ハ確ニ存在スル。例ヘバ Ξ ノ部分集合デトヲ含ムモノ全テカラナル集合族ガサウデアル。

明カニ、全テノ Δ -連鎖ノ共通部分ハ Δ -連鎖デアル。之ヲ $\mathbb{M}_0$ トスレバ $\mathbb{M}_0$ ハ Δ -連鎖ノ最小ナルモノデアル。故ニ $\mathbb{M}_0$ ノ部分族ガ Δ -連鎖ナラバソレハ $\mathbb{M}_0$ 自身デナケレバナラナイコトニ注意シテオク。

$\mathbb{M}_0$ ハ第1段ノ (1) 及ビ (2) ヲ満足シテキル。(3) モ満足シテキルコトヲ示ス前ニ次ノ (4) ヲ證明スル。

第3段 (4) 「 $\mathbb{M}_0$ ノ任意ノ二ツノ元ハ比較可能デアル。

即チ $A, P \in \mathbb{M}_0$ ナラバ $A \subset P$ (真部分集合), $A = P$,

$A \supset P$ ノ何レカーツガ必ズ成立スル。」

(4) ヲ證明スルタメニ性質 α ナルモノヲ考ヘル。「 $P \in \mathbb{M}_0$ ガ全テノ $A \in \mathbb{M}_0$ ト比較可能ナルトキハ P ハ性質 α ヲ有スル」ト云フ。 $\mathbb{M}_0$ ノ元デ $\subset P$ ナルモノノ全体ヲ Π_P , $\mathbb{M}_0$ ノ元デ $\supset P$ ナルモノノ全体ヲ ∇_P デアラハス。

(4)ハ $\mathbb{M}_0$ ノ任意ノ元ガ性質 α ヲ有スルト云フコトデアルガソノタメニハ $\mathbb{M}_0$ ノ元デ性質 α ヲ有スルモノノ全体 $\mathbb{L}$ ガ Δ -連鎖デアルコトヲ言ヘバ十分デアル。

0) $\{p\} \in \mathbb{L}$ 即チ $\{p\}$ ガ性質 α ヲ有スルコトハ明カデアル。

1) $A \in \mathbb{L}$ デ $\sup(A) = a$ が存在スルトキ $A \vee \{f(a)\} \in \mathbb{L}$

ナルコト。

$A^* = A \vee \{f(a)\}$ トオケバ $A^* \cong A$ デアルカラ

$\sqcup_A \vee \{A\} \subseteq \sqcup_{A^*} \vee \{A^*\}$. 故ニ $N = \sqcup_A \vee \{A\} \vee \{A^*\} \vee \nabla_{A^*}$

トオクトキ. $A^* \in \mathbb{L}$ 即チ $M_0 \subseteq \sqcup_{A^*} \vee \{A^*\} \vee \nabla_{A^*}$ ヲ證

明スルニハ $M_0 \subseteq N$ ヲ書ハバ十分デアリ, 従ツテ又 N が

Δ -連鎖デアルコトヲ言ヘバ十分デアル。

1) $\{b\} \in N$ ハ明カ。

2) $B \in N$ 且 $\sup(B) = b$ が存在スルトキ

$B^* = B \vee \{f(b)\} \in N$ ナルコト。

$B \in \sqcup_A$ ナラバ $BCA \rightarrow B^* \nsubseteq A$ (假ニ $B^* \supset A$

ナラバ $B^* \supset A \supset B$ トナリ不合理) $\rightarrow B^* \subseteq A$ (A

ハ性質 α ヲ有スル故) $\rightarrow B^* \in N$.

$B \in \{A\} \vee \{A^*\} \vee \nabla_{A^*}$ ナラバ $B^* \in \{A^*\} \vee \nabla_{A^*} \subseteq N$

ナルコトハ明カ。

3) 全テノ $\varphi \in \Sigma$ ニツキ $B_\varphi \in N$ ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Sigma} B_\varphi \in N$ ナルコト

全テノ B_φ が $\sqcup_A \vee \{A\}$ ノ元ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Sigma} B_\varphi \in \sqcup_A \vee \{A\}$,

又或ル B_φ が $\{A^*\} \vee \nabla_{A^*}$ ノ元ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Sigma} B_\varphi \in \{A^*\} \vee \nabla_{A^*}$

デアルコトハ明テカデアリ。

4) 2) 及ビ 3) ハ N が Δ -連鎖デアルコトヲ示シテ得ル。

即チ $A \vee \{f(a)\} \in \mathbb{L}$ ナルコトガ分ツタ。

2) 全テノ $\varphi \in \Sigma$ ニツキ $A_\varphi \in \mathbb{L}$ ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Sigma} A_\varphi \in \mathbb{L}$

ナルコト。

$\bigvee_{\varphi \in \Sigma} A_\varphi = B$ トオクトキ. $X \in M_0$ が全テノ A_φ ヲ含ム

ナラバ $X \in \{B\} \vee \nabla B$, 又或ル $A \varphi$ ニ含マレルナラバ
 $X \in \Pi_B \vee \{B\}$ デアルコトハ明カデアル。従ツテ
 $M_0 \subseteq \Pi_B \vee \{B\} \vee \nabla B$

0), 1) 及ビ 2) ハルガ Δ -連鎖デアルコトヲ示シテキル。
 故ニ、(4)ガ證明出来タ。

第4段 前段ノ(4)ヲ用キテ M_0 ガ第1段ノ(3)ヲ
 満足シテキルコトヲ證明スル。

M_0 ノ元ノ中ニ於ケル半順序ノ關係ガ線型順序デアルモ
 ノノ全体ヲ M'_0 トスル。 M'_0 ニ於テ Δ -連鎖ノ條件(0)
 及ビ(1)ガ成立シテキルコトハ明カ。又(4)ヲ用キレバ(2)
 ガ成立シテキルコトモ明カデアル。故ニ M_0 ハ M'_0 ト一致
 スル。

以上第1段ヨリ第4段マデデ補題1ノ證明が出来タ