



Title	Bernoulli数ノ漸化式
Author(s)	伊関, 兼四郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1945, 267, p. 286-291
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75132
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

伊関兼四郎 (東大)

(12月4日受付)

$$\frac{1}{2}Z \cot \frac{1}{2}Z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} \quad (|Z| < 2\pi)$$

定義サレル Bernoulli 数 B_n ハ種々ノ漸化式ヲ満足スル事ガ知ラレテキルガ、筆者ハ最近一ツノ新シイ漸化式ヲ得タノデ、次ニ之ヲ述ベテ見タイ。

[定義] $n \geq 1$. $1 \leq m \leq n$ ナル時 $2\mu-1$ ($1 \leq \mu \leq n$) ノ中カラ m 個ノ奇数ノ組合セ (重複ヲ許サズ、順序ヲ考ヘナイ) ヲ作ツテ之等ヲ掛合セタ積ノ総和ヲ $S_{2n+1}^{(n)}$ デ表ス. $n \geq 2$, $1 \leq m \leq n-1$ ナル時 2μ ($1 \leq \mu \leq n-1$) ノ中カラ同様ニ m 個ノ偶数ノ組合セヲ作ツテ之等ヲ掛合セタ積ノ総和ヲ $S_{2n}^{(n)}$ デ表ス. 更ニ

$$S_{2n+1}^{(0)} = 1 \quad (n \geq 0), \quad S_{2n}^{(0)} = 1 \quad (n \geq 1)$$

ト約束スル。

[定理] Bernoulli 数ニ対シテ次ノ漸化式ガ成立スル:

$$\sum_{\nu=1}^k \frac{k}{\nu} (2^{2\nu}-2) B_{\nu} S_{2k-1}^{(k-\nu)} = \sum_{\nu=1}^k \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^{\nu+1}} S_{2k}^{(k-\nu)} \quad (k \geq 1)$$

次ニ次第二此ノ定理ヲ証明シテ行ク事ニスル。

[補題 1]

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sin \frac{1}{2}Z}{\sin \frac{2k+2}{2}Z} dZ = \frac{S_{2k+2}^{(n)}}{(2n+1)!} \int \prod_{\nu=1}^n \left\{ 1 - \frac{Z^2}{(2\nu)^2} \right\} \quad (n \geq 0)$$

但シ左辺ノ積分ノ路ハ原点ヲ中心トシ R ($0 < R < \pi$) ヲ半径トスル円周ヲ正ノ向きニ一周スル。更ニ空虛ナ積ハ 1 ニ等

シイモノトスル。

〔証明〕 $n=0$ の場合ハ明ラカデアルカラ $n \geq 1$ トスル。

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sin SZ}{\sin^{2n+2} Z} dZ = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dZ}{\sin^{2n+2} Z} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} (SZ)^{2\nu+1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu S^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \int \frac{Z^{2\nu+1} dZ}{\sin^{2n+2} Z}$$

デアルカラ問題ノ式ノ左辺ハ S ノ高々 $2n+1$ 次ノ多項式デアル。之ヲ $f(S)$ トスレバ $f(0)=0$ 而シテ

$$\sin 2\nu Z = \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{2\nu}{2\mu-1} (-1)^{\nu-\mu} \cos^{2\mu-1} Z \sin^{2\nu-2\mu+1} Z \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

デアルカラ $f(2\nu)=f(-2\nu)=0 \quad (1 \leq \nu \leq n)$

故ニ $f(S) = C S \prod_{\nu=1}^n \left\{ 1 - \frac{S^2}{(2\nu)^2} \right\}$ ト置ケバ C ハ常数デアル。

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sin SZ}{S} \frac{dZ}{\sin^{2n+2} Z} = C \prod_{\nu=1}^n \left\{ 1 - \frac{S^2}{(2\nu)^2} \right\}$$

ニ於テ $S=0$ ト置ケバ

$$C = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{Z dZ}{\sin^{2n+2} Z} = \frac{S_{2n+2}^{(n)}}{(2n+1)!}$$

ナル事ハ容易ニ知ラレル。

〔補題2〕

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{Z^{2n-1} dZ}{\sin^{2n} Z} = \frac{(2n-1)!}{(2n-1)!} S_{2n}^{(n-m)} \quad (n \geq m \geq 1)$$

〔証明〕 補題1ノ兩辺ニ於テ $S^{2\nu+1} \quad (0 \leq \nu \leq n)$

ノ係数ヲ比較スレバ

$$\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{Z^{2\nu+1} dZ}{\sin^{2n+2} Z} = \frac{(-1)^\nu}{(2n+1)!} S_{2n+2}^{(n-\nu)}$$

〔補題3〕

$$\sum_{\nu=0}^k \frac{(-1)^\nu}{2\nu+3} S_{2k+2}^{(k-\nu)} = \frac{(2k+2)!}{2k+1} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dZ}{Z^2 \sin^{2k+1} Z} \quad (k \geq 0)$$

$$\begin{aligned}
 [\text{証明}] \quad \sum_{\nu=0}^k \frac{(-1)^\nu}{2\nu+3} S_{2k+2}^{(k-\nu)} &= \sum_{\nu=0}^k \frac{(-1)^\nu}{2\nu+3} \frac{(2k+1)!}{(2\nu+1)!} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{Z^{2\nu+1} dZ}{\sin^{2k+2} Z} \\
 &= \sum_{\nu=0}^k \frac{(2k+1)!}{2\pi i} \frac{(-1)^\nu (2\nu+2)}{(2\nu+3)!} \int \frac{Z^{2\nu+1} dZ}{\sin^{2k+2} Z} = \frac{(2k+1)!}{2\pi i} \int \frac{dZ}{\sin^{2k+2} Z} \\
 \frac{d}{dZ} \left(\frac{\sin Z}{Z} \right) &= \frac{(2k+2)!}{2k+1} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dZ}{Z^2 \sin^{2k+1} Z}
 \end{aligned}$$

[補題4]

有理整数 $k \geq 0$, 実数 $m > 2k$ に対シテ

$$\int_0^\infty \frac{x^m d\chi}{\sinh^{2k+1} \chi} = \frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \eta(m+1-2\nu) S_{2k+1}^{(k-\nu)}$$

$$\text{但シ } \eta(s) = (1-2^{-s}) \zeta(s) = \sum_{\nu=0}^\infty (2\nu+1)^{-s} \quad (s > 1)$$

ヲ $\zeta(s)$ の Riemann の ζ 函数デアル。

$$\begin{aligned}
 [\text{証明}] \quad \int_0^\infty \frac{x^m d\chi}{\sinh^{2k+1} \chi} &= \int_0^\infty x^m d\chi \left\{ 2^{2k+1} e^{-(2k+1)\chi} \sum_{\nu=0}^\infty \binom{-2k+1}{\nu} \right. \\
 &\quad \left. (-e^{-2\chi})^\nu \right\} = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{2^{2k+1} (2k+\nu)!}{(2k)! \nu!} \int_0^\infty x^m e^{-(2k+1+2\nu)\chi} d\chi \\
 &= \sum_{\nu=0}^\infty \frac{2^{2k+1} (2k+\nu)!}{(2k)! \nu!} \frac{\Gamma(m+1)}{(2k+1+2\nu)^{m+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{然ルニ} \quad \frac{(2k+\nu)!}{\nu!} &= 2^{-2k} \prod_{\mu=1}^k \{ (2k+1+2\nu)^2 - (2\mu-1)^2 \} \\
 &= 2^{-2k} \sum_{\mu=0}^k (2k+1+2\nu)^{2k-2\mu} (-1)^\mu S_{2k+1}^{(\mu)}
 \end{aligned}$$

デアルカラ

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x^m d\chi}{\sinh^{2k+1} \chi} &= \frac{2^{2k+1} \Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\nu=0}^\infty 2^{-2k} \sum_{\mu=0}^k (2k+1+2\nu)^{2\mu} (-1)^{k-\mu} \\
 &\quad \frac{S_{2k+1}^{(k-\mu)}}{(2k+1+2\nu)^{m+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^{\infty} (2k+1+2\nu)^{2\mu-m-1} S_{2k+1}^{(k-\mu)} (-)^{k-\mu} \\
&= \frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+2\nu)^{2\mu-m-1} S_{2k+1}^{(k-\mu)} (-)^{k-\mu} \\
&= \frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\mu=0}^k (-)^{k-\mu} \eta(m+1-2\mu) S_{2k+1}^{(k-\mu)}
\end{aligned}$$

【補題5】 有理整数 $k \geq 0$, 複素数 m 二對シテ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{Z^m dZ}{\sinh^{2k+1} Z} = \sum_{\nu=0}^k \frac{2(-)^{k+1+\nu} S_{2k+1}^{(k-\nu)}}{(2k)! \Gamma(-m)} \eta(m+1-2\nu).$$

但シ左辺ノ積分ノ路ハ $-\infty$ カラ出発シテ原点ヲ正ノ向キニ一周シ再び $-\infty$ ニ戻ル曲線デ、積分函数ノ極 $n\pi i$ (n ハ有理整数) ヲ通ラナイモノトスル。更ニ積分路上デ $|\arg Z| \leq \pi$ トスル。

【証明】 上式ノ左辺ハ明ラカニ

汎ノ整函数デアル。

今 $m > 2k$ トスレバ

右図ノ積分路ヲ変形

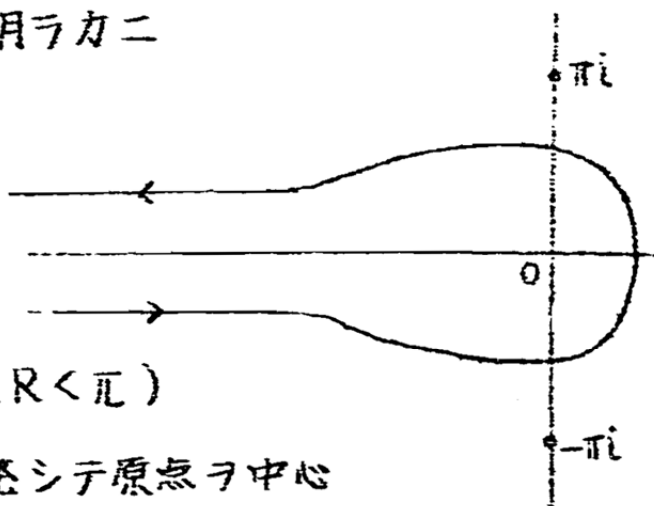
シテ $-\infty$ カラ $-R$ ($0 < R < \pi$)

ニ至ル直線 $-R$ カラ出発シテ原点ヲ中心

ニシテ原点ノ周圍ヲ正ノ向キニ一周シ再び $-R$ ニ戻ル円周、

$-R$ カラ $-\infty$ ニ至ル直線ノ三部分ニ分ケル時、原点ノ周

ノ積分ハ $R \rightarrow 0$ ナル時消失スルカラ



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{Z^m dZ}{\sinh^{2k+1} Z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{-(\chi e^{-\pi i})^m}{\sinh^{2k+1} \chi} d\chi + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty}$$

$$\frac{(xe^{\pi i})^m}{\sinh^{2k+1} x} dx$$

$$= \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^m dx}{\sinh^{2k+1} x} = \frac{2\Gamma(m+1)}{\pi(2k)!} \sin m\pi \sum_{\mu=0}^k$$

$$(-)^{k-\mu} \eta(m+1-2\mu) S_{2k+1}^{(k-\mu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^k \frac{2(-)^{k+1-\nu} S_{2k+1}^{(k-\nu)}}{(2k)! \Gamma(-m)} \eta(m+1-2\nu)$$

故ニ証明スベキ式ハ m ノ任意ノ値ニ對シテ成立スル事ガナル (解析接続ノ定理)。

[補題 6]

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z^2 \sinh^{2k+1} z} = \sum_{\nu=0}^k \frac{2^{2\nu+1}-1}{(2k)!(\nu+1)} B_{\nu+1} S_{2k+1}^{(k-\nu)} \quad (k \geq 0)$$

[証明] $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z^2 \sinh^{2k+1} z} = \frac{(-)^{k-1}}{2\pi i} \int \frac{dz}{z^2 \sinh^{2k+1} z}$

$$= (-)^{k-1} \sum_{\nu=0}^k \frac{2(-)^{k+1-\nu}}{(2k)!} \eta(-1-2\nu) S_{2k+1}^{(k-\nu)}$$

ナル事ハ補題 5 カラ明ラカデアル (積分路ハ勿論補題 1ニ於ケルト同ジデアル。) 然ルニ

$$\eta(-1-2\nu) = (1-2^{2\nu+1}) \zeta(-1-2\nu) = (1-2^{2\nu+1}) \frac{(-)^{\nu+1} B_{\nu+1}}{2(\nu+1)}$$

デアルカラ補題 6 ガ成立スル。

[定理ノ証明] 補題 3 及ビ 6 カラ

$$\sum_{\nu=0}^k \frac{(-)^{\nu}}{2^{\nu+3}} S_{2k+2}^{(k-\nu)} = \frac{(2k+2)!}{2k+1} \sum_{\nu=0}^k \frac{2^{2\nu+1}-1}{(2k)!(\nu+1)} B_{\nu+1} S_{2k+1}^{(k-\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^k \frac{k+1}{\nu+1} (2^{2\nu+2}-2) B_{\nu+1} S_{2k+1}^{(k-\nu)} \quad (k \geq 0)$$

此処で q の代りに $q-1$ 、 $q-1$ を置けば定理 1 式が得られる。