



Title	面積ノ概念ニ基ヅク空間ノ幾何學 （続）
Author(s)	岩本, 秀行
Citation	全国紙上数学談話会. 1945, 267, p. 292-298
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75133
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

岩本秀行 (名大)

(11月1日受付)

前談話ニ於テハ n 次元空間ニ於ケル k 次元曲面ノ面積 F 、
積分

$$0 = \int L(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}) du^1 \cdots du^\lambda$$

デキヘラレル空間ノ幾何學ヲ論ジタ。ユコデハ面積ヲ与ヘル
積分ガ最モ一般ノ形

$$0 = \int F(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}, \dots, \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{\lambda_1} \cdots \partial u^{\lambda_m}}) du^1 \cdots du^k$$

デキヘラレル空間ノ幾何學化ノ問題ヲ取扱フ。Fハ勿論積分
不変量ノ條件:

$$\Delta_\mu^{\lambda(s)} F = \sum_{r \geq 1} (\gamma) F_{; \lambda}^{\lambda(s) \mu(r-s)} p_{\mu}^{\lambda(r-s)} = 0 \quad (s \geq 2)$$

$$\Delta_\mu^\lambda F = \sum_{r \geq 1} \gamma F_{; \lambda}^{\lambda \mu(r-1)} p_{\mu}^{\lambda(r-1)} = \delta_\mu^\lambda F$$

ヲ満足シナケレバナラナイ。

$$\S 1 \quad e_i^{\lambda(M)} = F^{-1} F_{; i}^{\lambda(M)}, \quad e_i^{\lambda(M)} e_j^{\mu(M)} = F^{-1} F_{; i j}^{\lambda(M) \mu(M)}$$

ハ i, j ニ関シ共変ベクトル, λ, μ ニ関シ反変 U -tensor
デアル。

$$e_{i_1 \dots i_{n-k}}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} e_{j_1 \dots j_{n-k}}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{(\lambda_1 \dots \lambda_n)} \sum_{(\mu_1 \dots \mu_n)}' e_{(i_1 \dots i_{n-k})}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} e_{(j_1 \dots j_{n-k})}^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

$$\dots e_{(i_{n-k} \dots i_n)}^{\lambda_{n-k+1} \dots \lambda_n} e_{(j_{n-k} \dots j_n)}^{\mu_{n-k+1} \dots \mu_n} \quad (N = (n-k)M)$$

$$u_{i_1 \dots i_{n-k}} = \{ i_1 \dots i_{n-k} i_{n-k+1} \dots i_n p_{j_1}^{i_{n-k+1}} \dots p_{j_k}^{i_n}$$

トナル重ヲツフレバ

$$e_{i_1 \dots i_{n-k} \cdot j_1 \dots j_{n-k}}^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N} = u_{i_1 \dots i_{n-k}} \cdot u_{j_1 \dots j_{n-k}} G^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N}$$

ナル如キ量 $G^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N}$ ヲ求メルコトが出来ル。ソノ

行列式ガ0デナイトスレバ

$$g G^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N} = g^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N} \quad |g^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N}| =$$

ナル如キ座標変換デ2荷ノ intrinsic + scalar g ト座標

変換デ不変ナ U-tensor $g^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N}$ ヲ求メルコトが出来ル。

之ヲ用ヒテ次ノ拡張サレタ Christoffel 1 記号

$$G_{\mu_1 \dots \mu_N, \nu}^{\lambda_1 \dots \lambda_N} = \frac{1}{2} g^{\lambda_1 \dots \lambda_N \nu_1 \dots \nu_N} \sum_{\alpha} (g_{\nu_1 \dots \nu_N \mu_1 \dots \mu_N / \nu} + g_{\nu_1 \dots \nu_N \mu_1 \dots \mu_{\alpha-1} \nu \mu_{\alpha+1} \dots \mu_N} - g_{\mu_1 \dots \mu_{\alpha-1} \nu \mu_{\alpha+1} \dots \mu_N} / \nu_{\alpha})$$

ヲツクリ

$$G_{\mu\nu}^{\lambda} = A G_{\lambda_1 \dots \lambda_{N-1} \mu, \nu}^{\lambda_1 \dots \lambda_{N-1} \lambda} + B \delta_{\mu}^{\lambda} G_{\lambda_1 \dots \lambda_N, \nu}^{\lambda_1 \dots \lambda_N}$$

(A, B ハ適當ナ有理数トスル)。

トオケバ, $G_{\mu\nu}^{\lambda}$ ハ V-tensor ニ対スル擬似接続ヲ定義スル。

之ハ最高次ノ面素 $p_{\lambda}^{i(M+1)}$ ニ因シテ一次デアル。

今 $e_{i_1 \dots i_M}^{\lambda(M)} e_{j_1 \dots j_M}^{\mu(M)}$ ガ次ノ如キ性質ヲモツト假定スル。

$$f_{\nu(M) \lambda(M)}^k e_{i_1 \dots i_M}^{\lambda(M)} e_{j_1 \dots j_M}^{\mu(M)} = Q_j^k \delta_{\nu_1}^{(2)} \dots \delta_{\nu_M}^{\mu_M}$$

$$Q_j^k = \delta_j^k - p_j^{\nu} p_{\nu}^k$$

ナル如キ M 次ノ量 $f_{\lambda(M) \mu(M)}^i$ ガ少クトモ一組適當ナ p_j^{ν} ニ

対シテ存在スル。

上ノ様ナ量ガ存在スレバ, ソレハ無数ニ存在シ, 且ソノ任意

ノニツノ間ニハ

$\bar{f}_{\lambda(M)}^i \mu(M)^j = f_{\lambda(M)}^i \mu(M)^j + \varphi_{\lambda(M)}^{\nu} \mu(M)^i p_{\nu}^j + \varphi_{\lambda(M)}^i \mu(M)^{\nu} p_{\nu}^j$
 ナル關係ガ存在シ、遂モ亦成立スル。又 $\psi_{\lambda(M)}^i \mu(M)^j \varphi_{\mu(M)}^j = 0$
 ナル $\varphi_{\mu(M)}^j$ ハ必ズ $\varphi_{\mu(M)}^{\nu} p_{\nu}^j$ ナル形トナル、又 $\Phi_{\lambda(M)}^{\lambda}$

$$\Psi_{\lambda(M)}^{\lambda} \text{ガ} \Phi_{\lambda(M)}^{\lambda} p_{\lambda}^i = \Psi_{\lambda(M)}^{\lambda} p_{\lambda}^i = 0$$

ヲ満足スル不変量ナルトキ

$$f_{\lambda(M)}^i \mu(M)^j \Phi_{\lambda(M)}^{\lambda} \Psi_{\mu(M)}^{\mu}$$

ハ上ノ關係ヲ満足スル $f_{\lambda(M)}^i \mu(M)^j$ ニ關係シナイ *invariant* デアル。

§2 v^i ヲ任意ノ *intrinsic* + 反変 *vector* ト
 スレバ

$$D_{\mu}(F_{ij}^{\lambda(M)}; v) = F^{-1} \left[F_{ij}^{\lambda(M)}; \mu(M-1) \mu v^j / \mu + (F_{ij}^{\lambda(M)}; \mu(M-1)) \right. \\ \left. - \delta_{(v_1, \dots, \delta_{v_{M-2}}} G_{v_{M-2} v_M}^{\mu_{M-1}}) F_{ij}^{\lambda(M)} v^{(M)} \right] v^j$$

ハ *intrinsic* + 共変 *vector* デ μ ニ対シ U -共変
vector デアル。今

$$\nabla_{\mu} F_{ij}^{\lambda(M)} = F_{ij}^{\lambda(M)} / \mu - \frac{1}{pF} \left[f_{\mu(M-1) \mu}^k \frac{k}{\nu(M)} (F_{jk}^{\nu(M) \mu(M-1)} - \right. \\ \left. \delta_{(w_1, \dots, \delta_{w_{M-2}}} G_{w_{M-2} w_M}^{\mu_{M-1}}) F_{jk}^{\nu(M)} \right] F_{ij}^{\lambda(M)} \\ + \left(\sum_{\alpha} \delta_{\mu_1}^{\lambda_1} \dots G_{\mu_{M-1} \mu}^{\lambda_{M-1}} \delta_{\mu M}^{\lambda_M} \right) - \delta_{\mu_1}^{\lambda_1} \dots \delta_{\mu M}^{\lambda_M} G_{\alpha \mu}^{\lambda} F_{ij}^{\mu(M)} \\ (M \geq 3)$$

$$\nabla_{\mu} F_{ij}^{\lambda_1 \lambda_2} = F_{ij}^{\lambda_1 \lambda_2} / \mu - \frac{1}{F} \left[f_{\mu \pi \nu_1 \nu_2}^k \frac{k}{\nu_1 \nu_2} (F_{jk}^{\nu_1 \nu_2} / \pi - G_{w_1 w_2}^{\pi} F_{jk}^{\nu_1 \nu_2} \right.$$

$$w_1, w_2 \Big) - f_{\mu\pi} \frac{k}{v_1 v_2} \in \pi F; i \Big]$$

$$-G_{x\mu}^{\alpha} F_i^{\lambda_1 \lambda_2} + 2 G_{\lambda\mu}^{(\lambda_1} F_i^{\lambda_2)} \quad (M=2)$$

$$\text{兹二} \quad E_i^{\lambda} = 2F_i^{\lambda\mu}/\mu - F_i^{\lambda} + F_{\mu\nu}^{\lambda} F_i^{\mu\nu}/2$$

是共变 vector 且 U -vector, 又

$$p^i \nabla_\mu F_i(\lambda^{\mu\nu}) = 0$$

ヲ満足シ、且 $f_{\lambda(\dot{M})} \mu(\dot{M})$ ノトリ方ニ無關係デアル。

$$\text{又 } f_{(\lambda^{(m)} | \mu^{(m)} | \nabla_{\lambda}) F; \mu^{(m)}_{\lambda^{(m)}}}$$

$$= (\delta_k^i - p_k^\nu p_\nu^i) [(p_{\lambda(M)\lambda}^k + C_{(\lambda(M)\lambda)}^k \mu_j^{(M+1)} p_{\lambda(M+1)}^j)]$$

$$+ M_{\lambda^{(m)}\lambda}^k (\chi_i^i, p_{\lambda_i}^i, \dots, p_{\lambda^{(m)}}^i)]$$

ナル關係が成立スル、從ツテ行列

$$\|K_{\lambda(M+1)}^i \frac{\mu(M+1)}{j}\| = \|\delta_j^{\frac{k}{2}} \delta_{\lambda_1}^{\mu_1} \dots \delta_{\lambda_{M+1}}^{\mu_{M+1}} + C_{\lambda(M+1)}^{\frac{k}{2}, \mu(M+1)} \frac{\mu(M+1)}{j}\|$$

0" non-singular タートスレバ之カテ Tensor

$$T_{\lambda(M+1)}^i = (\delta_j^i - p_j^\nu p_\nu^i)(p_{\lambda(M+1)}^j + H_{\lambda(M+1)}^j)$$

ヲ次ノ關係ガ成立スル様ニ定メルコトが出来ル。

$$f(\lambda^{(M)} | \mu^{(M)} | V_\lambda) \quad F; \quad \mu_j^{(M)} = (\delta_j^i - P_j^\nu P_\nu^i) K_{\lambda^{(M+1)}}^j \mu_{\lambda^{(M+1)}}^{(M+1)}$$

今 Φ を任意の ∇ -tensor とすレバ

$$\Phi_{||\lambda} = \Phi_{\perp\lambda} - \Phi_{\perp}^{\lambda(M)} T_{\lambda(M)\lambda}$$

ハ径数変換デ重ハ ト同ジ変換ヲスル量デ $f_{\lambda}^i(M)/\mu(M)$ ニ無

関係ニキマリ、且次数 M デアル。重 $\|\lambda_1\| \|\lambda_2\| \dots \|\lambda_m\|$
 $= \text{重} \|\lambda_1 + \dots + \lambda_m\| = \text{重} \|\lambda(m)\|$ ナル記号ヲ導入スル。

§3 F カラ次ノ所謂 *Synge's vector* ヲ導クコトガ出来ル。

$$F_i E_i^{\lambda(s)} = \sum_{r \geq s} (-1)^r \binom{r}{s} F_i^{(\lambda(s) \lambda(r-s))} \|\lambda(r-s)\|$$

$E_i^{\lambda(s)}$ ハ径数変換デソレ等ノ間デ *linear* ニ変換サレ、
 径数ハ $\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \dots$, *Polynomial* デアルカ
 ラ、 $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ 及ビソノ微分デ *intrinsic* ニスル事ガ出来ル。
 但シ $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ ハ $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ / $M+1$ 次ノ面素ヲ $-(\delta_j^i - p_j^\nu p_\nu^i) H_{\lambda}^{\bar{j}(m)}$
 デオキカヘタモノトスル。之ヲ $e_i^{\lambda(s)}$ トスル。

$$e_i^{\lambda(s)} p_\nu^i = 0 \quad (s \geq 2)$$

$$e_i^{\lambda} p_\nu^i = \delta_\nu^i$$

今 $e_{\lambda}^{\bar{i}(m)} \mu_{(m)}^{\bar{j}} = (\delta_{\bar{k}}^{\bar{i}} - e_{\bar{k}}^\nu p_\nu^{\bar{i}}) (\delta_{\bar{k}}^{\bar{j}} - e_{\bar{k}}^\nu p_\nu^{\bar{j}}) f_{\lambda(m)}^{\bar{k}} \mu_{(m)}^{\bar{k}}$
 トオケバ之ハ $f_{\lambda(m)}^{\bar{i}} \mu_{(m)}^{\bar{j}} = \text{無関係デアル}$ 。

$$\Lambda_{\bar{j}\mu}^{\bar{i}} = \frac{1}{pF} e_{\mu(m+1)}^{\bar{i}} \mu_{\lambda(m)}^{\bar{k}} (F; \bar{k}; \bar{j})$$

$$- \sum \delta_{(w_1}^{\mu_1} \Gamma_{\omega_{m+1} \omega_m}^{\mu_{m+1}} F; \bar{k}; \bar{j})$$

ナル量ヲ用ヒ任意ノ反変 *vector* - v^i ヲリ

$$(\delta_j^i - e_j^\nu p_\nu^i) v^{\bar{j}}_{;\mu} + \Lambda_{\bar{j}\mu}^{\bar{i}} v^{\bar{j}}$$

ナル *invariant* ヲ導クコトガ出来ル。之ト

$$(e_j^\nu v^{\bar{j}})_{;\mu} = e_j^\nu v^{\bar{j}}_{;\mu} + p_\nu^i (e_j^\nu \|\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu e_j^\mu)$$

ナル U -*vector* ヲリ

$$v^i_{;\lambda} = \frac{\partial v^i}{\partial \mu^\lambda} + \Gamma_{\partial\lambda}^i v^{\bar{i}}$$

$$\Gamma_{\lambda}^i = \Lambda_{\lambda}^i + p_{\lambda}^i (\xi_{\lambda}^{\nu} + p_{\lambda}^{\nu} \xi_{\lambda}^{\mu})$$

ナル曲面ニ沿フ共変微分ガ定義サレル。

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+1) \Gamma_{\lambda}^i p_{\lambda}^k \mu^{(r)\lambda} dp_{\lambda}^k(r)$$

ヲ補正シテ共変微分

$$\delta v^i = dv^i + \sum_{r=0}^{M-1} \Gamma_{\lambda}^i \mu^{(r)\lambda} dp_{\lambda}^k(r) v^j$$

ヲ得ル。

$$\xi_{\mu^{(M)}\lambda^{(M)}}^k \delta F_{\lambda}^i$$

$$\xi_{\mu^{(M)}\lambda^{(M)}}^i \sum_{s=0}^{\infty} \binom{r}{s} F_{\lambda}^i \mu^{(r-s)\lambda} \mu^{(s)\lambda} dp_{\lambda}^j(r-s)$$

ヲ補正シテ基接続

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p_{\lambda}^i(m) = (\delta_{\lambda}^i - \xi_{\lambda}^{\nu} p_{\lambda}^{\nu}) dp_{\lambda}^j(m) + \sum_{r=0}^{M-1} \Lambda_{\lambda}^i \mu^{(r)\lambda} dp_{\lambda}^j(r) \\ \dots \\ \delta p_{\lambda}^i = (\delta_{\lambda}^i - \xi_{\lambda}^{\nu} p_{\lambda}^{\nu}) dp_{\lambda}^j + \Lambda_{\lambda}^i d\chi^j \end{array} \right.$$

U-tensorノ共変微分ハ

$$\delta v^{\lambda} = p_{\lambda}^{\mu} \delta (p_{\mu}^{\nu} v^{\mu})$$

$$\text{即チ } \delta v^{\lambda} = dv^{\lambda} + p_{\lambda}^{\mu} (dp_{\mu}^{\nu} + dp_{\mu}^j \sum_{r=0}^{M-1} \Gamma_{\lambda}^i \mu^{(r)\lambda} dp_{\lambda}^k(r)) v^{\mu}$$

ニヨリ定義スレハヨイ。

§4.

$$\text{今 } M \geq 3 \text{ トシ } a_{\alpha} = \xi_{\alpha}^i \mu^{(M-1)\lambda} \xi_{\lambda}^j \mu^{(M-1)\mu} \xi_{\mu}^{\nu} \mu^{(M-1)\nu}$$

ナル U-vectorヲ考ヘル。M=2 ナラバ $\xi_{\lambda}^i \mu^{(M-1)\lambda}$ ノ代

$$\text{リニ } \xi = \xi_{\lambda}^i \mu^{(M-1)\lambda} \xi_{\lambda}^j \mu^{(M-1)\mu} \xi_{\mu}^{\nu} \mu^{(M-1)\nu}$$

ヲ用ヒテツクツク SynggeノM-1-vectorヲ用ヒテ

U-vector a_{α} ヲ導イテオク。

$$a = g^{\lambda_1 \dots \lambda_N \mu_1 \dots \mu_N} a_{\lambda_1} \dots a_{\lambda_N} a_{\mu_1} \dots a_{\mu_N}$$

$$a^{\lambda} = g^{\lambda\lambda_2 \dots \lambda_N, \mu_1 \dots \mu_N} a_{\lambda_2 \dots \lambda_N} a_{\mu_1 \dots \mu_N}$$

$$a^{\lambda\mu} = g^{\lambda\lambda_2 \dots \lambda_N, \mu\mu_2 \dots \mu_N} a_{\lambda_2 \dots \lambda_N} a_{\mu_2 \dots \mu_N}$$

トオク。

$$\text{今 } g^{\lambda\mu} = p(Na \cdot a^{\lambda\mu} - (N-1)a^{\lambda}a^{\mu})$$

1 行列式が 0 ではないトシ

$$\pm |g^{\lambda\mu}| = L^{-2}$$

ニヨリ p を定メル。次ニ

$$g''_{ij} = \sigma \cdot g_{\lambda_1 \mu_1 \dots \lambda_M \mu_M} \ell^{\lambda^{(M)}}_i \ell^{\mu^{(M)}}_j$$

$$\text{トオキ } \pm g''[i_1, j_1, \dots, i_n, j_n] = U_{i_1 \dots i_n} U_{j_1 \dots j_n}$$

ニヨリ σ を定メル。然ルトキハ

$$g_{ij} = g''_{ij} + \ell^{\nu}_i \ell^{\lambda}_j g_{\nu\lambda}$$

ニヨリ基本 tensor g_{ij} を定義サレ

$$g_{\lambda\mu} = p^{\lambda}_{\lambda'} p^{\mu}_{\mu'} g_{\lambda'\mu'}, \quad \ell^{\lambda}_i = g_{ij} g^{\lambda\mu} p^{\mu}_{\lambda'} \quad \text{が成立スル。}$$

之ヲ用ヒテ Euclid 接続ヲ導入スルコトが出来ル。

$$\delta v^i = a v^i + w^i_j(d) v^j$$

$$w^i_j(d) = \sum_{r=0}^M \gamma^i_{jk} \lambda^{(r)}_k d p^k_{\lambda(r)}$$

$$\gamma^i_{jk} \lambda^{(r)}_k = \frac{1}{2} g^{ik} g^*_{k[j} g^*_{k]i} \lambda^{(r)}_k \quad (r \geq 1)$$

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ik} \{ g^*_{kj, k} + g^*_{kk, j} - g^*_{j, k, k} \}$$

$$\text{茲ニ} \quad dg_{ij} = \sum_{r=0}^M g^*_{ij, k} \lambda^{(r)}_k \delta p^k_{\lambda(r)}$$

トスル。