



Title	表現的見地カラ
Author(s)	高野, 一夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1945, 267, p. 303-310
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75135
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

高野一夫 (補和)

(1月16日 受付)

§0. 数年前ニ J. Haantjes 氏ハ氏ノ把握スル道ノ幾何學ニ関スル考究ノ結果ヲ論文トシタ、(1) ソノ論法ハ真ニ巧デアツテ、吾々ノ感嘆スルトコロデアルケレドモ、ソノ中カラ必シ許リノ論究ヲ拉チ去リ、モウ一步フミ込ンデ表現的ニ考察ヲメグラシテミタイト思フ。勿論ソノ結果ハ新シイモノデハナイケレドモ、カヤウナ方法デモ解釈が更新サレル意ヲ御判読サレシコトヲ。

§1. Haantjes ハ先ヅ $\lambda, \mu, \dots = 0, 1, \dots, n$ ナル添数ヲ用ヒテ n 次元集合体ノ中デ X^λ ナル有次座標ヲ導入シ且、之ニ對シテ

$$(1.1) \quad X^\lambda = X^\mu (X^\mu)$$

ト云フ変換ノ集合ヲ添ヘ、 X^λ ハ X^μ ニ関スル 1 次ノ有次解析函数トシ、ソノヤコビアンハ考ヘテキル點ニ於テハ 0 デハナイモノトシテキル。

カヤウナ有次座標ヲモツテキル n 次元集合体ノコトヲ彼ハ 一般化サレタ射影空間 ト呼ビ H_n デ表ハシテキル。

トコロデ彼ハ又次ノヤウナ制限ヲ手ヘテキル。即チ

射影接線径数ヲ $\Pi_{\alpha\beta}$ デ表ハストキ、吾々ノ集合体ハ次ノ條件ヲ満足スルモノトスルノデアル。

$$(1.2) \quad \Pi_{\mu\nu}^{\lambda} = \Pi_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad \Pi_{\mu\nu}^{\lambda} x^{\mu} = 0, \quad \Pi_{\mu\gamma, \omega}^{\lambda} x^{\omega} + \Pi_{\alpha\nu}^{\lambda} = 0$$

コゝデ コンマ ハ x^{ω} ニ關スル普通ノ微分ヲ表ハスコトニスル。

彼ハ パスノ方程式トシテ

$$(1.3) \quad \frac{\alpha^2 x^{\lambda}}{\alpha t^2} + \Pi_{\alpha\nu}^{\lambda} \frac{\alpha x^{\alpha}}{\alpha t} \frac{\alpha x^{\nu}}{\alpha t} = \alpha x^{\lambda} + \beta \frac{\alpha x^{\lambda}}{\alpha t}$$

ヲトツテヤル。吾々ハ 之ヲ解カウ。サウシテソレヲ

$$x^{\lambda} = x^{\lambda}(t)$$

デ表ハシテ、 $t = u'/u''$ トオケバ、カウシテ吾々ハパスノ別ノ表現

$$(1.4) \quad x^{\lambda} = x^{\lambda}(u', u'')$$

ヲ得ル。

勿論 $x^{\lambda}(u', u'') \equiv x^{\lambda}(u'')$ 、 $(a=0,1)$ ハ 1次ノ齊次函数ト考ヘネバイケナイノデ、 u'' ト入 u'' トハ世線上ノ同ジ点ヲ表ハシテヤル。

次ニ u'' ナル齊次媒介変数ノ変換ハト云ヘバ、ソレハ

$$(1.5) \quad u^{a'} = u^{a'}(u'')$$

ナル關係デアリ、1次ノ齊次函数デアル。

カヤウナ考ヘカラ、オイラーノ齊次函数定理ニ依ツテ

$$(1.6) \quad x^{\lambda} = B_a^{\lambda} u^a, \quad B_a^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^a}$$

$$(1.7) \quad u^{a'} = B_a^{a'} u^a, \quad B_a^{a'} = \frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a}$$

トナリ、且又

$$\frac{dx^\lambda}{dt} = B_a^\lambda \frac{du^a}{dt}$$

デアルカラ吾々ハ次ノ關係ヲ得ル。

$$(1.8) \quad B_a^\lambda = p_a \frac{dx^\lambda}{dt} + q_a x^\lambda$$

(1.8) ト (1.6) カラ

$$(1.9) \quad \frac{dx^\lambda}{dt} = \eta^a B_a^\lambda, \quad x^\lambda = u^a B_a^\lambda$$

(1.3) ヲ考ヘ乍テ, (1.8) ヲ夫處微分スレバ

$$B_c^\mu \nabla_\mu B_a^\lambda \text{ ハ } x^\lambda \text{ ト } \frac{dx^\lambda}{dt} \text{ ノ一次結合デアリ従ツテ,}$$

(1.9) ニ依ツテ B_a^λ ト B_c^λ トノ一次表示トナル,

ダカラ、カヤウニシテパスノ方程式ハ

$$(1.10) \quad B_c^\mu \nabla_\mu B_a^\lambda = \partial_c B_a^\lambda + \Pi_{\mu\nu}^\lambda B_c^{\mu\nu} = \Gamma_{ca}^\lambda B_a^\lambda$$

ト変ナル。兩辺ヲ比ベルト Γ_{ca}^λ ハ u^a ノ一次ノ函数ナル

コトガ判リシカモ u^a ヲ (1.5) テ変換スルト, Γ_{ca}^λ ハ

$$(1.11) \quad \Gamma_{ca}^{\lambda'} = B_{ac}^{\lambda'c} \Gamma_{ca}^\lambda + B_a^{\lambda'} \partial_c B_a^\lambda,$$

$$(B_{ac}^{\lambda'c} = B_a^{\lambda'} B_c^\lambda B_a^\lambda)$$

ナル変換ヲ受ケルコトモ判ル。

従ツテ, Γ_{ca}^λ ハ H_2 ニ於ケル射影接続係数ト考ヘテヨイ
訣デアル。

§2. 以上ハ *Haantjes* ノ論述ノノマヘデアルケレドモ、
コノ H_2 ト云フ空間ヲ別ノ方向カラ眺メテ、考亮シテミヨウ。
幸ニモ吾々ハソレヲ指示スル論文ヲモツテキル。(2)

結論ヲ述ベレバ

H_n トハ実ハ $n+1$ 次ノ特殊ナ擬似接続空間 A_{n+1} ニ於
テ与ヘラレルニ他ナラナイ。

ノデアル。

如何ニモ、 $\lambda, \mu, \dots = 0, 1, \dots, n$ ニトリ、 $\lambda^\wedge$ ヲ以テ
 $n+1$ 次元擬似接続空間 A_{n+1} ノ任意ノ一点ノ座標ヲ表ハス
モノトシテ、コノ空間ニ反変ベクトル場 $\xi^\wedge$ ヲ与ヘ接続係数
ヲ $\pi_{\lambda\mu}^\wedge$ テ表ハス。

ソシテ、 A_{n+1} ニ於テ次ノ特性ヲ与ヘル。

$$(2.1) \quad \begin{cases} (i) \quad \pi_{\lambda\mu}^\wedge = \pi_{\mu\lambda}^\wedge, \\ (ii) \quad \xi_{\lambda\mu}^\wedge = \delta_{\lambda\mu}, \\ (iii) \quad \pi_{\lambda\mu\nu}^\wedge \xi^\nu = 0 \end{cases}$$

コノデ セミコロソ ハ共変微分ヲ表ハス。ソシテ

$$(2.2) \quad \pi_{\lambda\mu\nu}^\wedge = \pi_{\lambda\nu, \mu}^\wedge - \pi_{\lambda\mu, \nu}^\wedge + \pi_{\lambda\nu}^\alpha \pi_{\alpha\mu}^\wedge - \pi_{\lambda\mu}^\alpha \pi_{\alpha\nu}^\wedge$$

ソレデ吾々ハ特別ナ座標系ヲエラシメ

$$(2.3) \quad \xi^\wedge = \lambda^\wedge$$

トスル。コノ関係ヲソノママニスルタメニハ $\lambda^\wedge$ ハ 1 次ノ有
次函数デナケレバナラヌコトハ見易イ。

カヤウナ A_{n+1} ハ実ハ § 1 ニ於テ考ヘタ H_n ノ一ツノ表
示デアル。

實際 (2.1)) (i) カラ

$$\pi_{\lambda\mu}^\wedge = \pi_{\mu\lambda}^\wedge,$$

$$(ii) \text{ カラ } \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} + \pi_{\lambda\mu}^\alpha \xi^\mu = \delta_{\lambda\mu}, \quad \therefore \pi_{\lambda\mu}^\alpha \lambda^\mu = 0$$

之ハ云フマデモナク (1.2) ノ第二式デアル。

(2.1) ノ (iii) カラ

$$\pi_{\mu\nu}^{\wedge} \lambda^{\omega} = 0$$

(2.2) ヘ λ^{ω} ヲ乗ジテ $\pi_{\mu\nu}^{\wedge} \lambda^{\omega} = 0$ ヲ使フト

$$\pi_{\mu\nu, \omega}^{\wedge} \lambda^{\omega} = -\pi_{\mu\nu}^{\wedge},$$

之ハ (1.2) ノ第三式デアル。

カウシテ吾々ハ $n+1$ 次元ノ擬似接続集合体 A_{n+1} ニ(2.1)

ト(2.3) ヲ附帯セセルト、ソレガ H_n ノ別ナ表ハシ方
ニナルコトガ判ツタ訳デアル。

ソレデ §1 デ考ヘタパス $\lambda^{\wedge} = \lambda^{\wedge}(u^{\wedge})$ ヲカヤウナ A_{n+1}
ノ中ノパス ト考ヘテ次ノヤウニ推論スル。

Haantjes ハ u -曲面ヲ以テパスヲ表サントシテ居ル。

換言スレバ (2.1), (2.3) ヲモツタ A_{n+1} ノ中デパス
系ガ与ヘラレテ居テ、之ニ2次元曲面 (u', u') ガ附
随シテキルノデアル。

シカラバサウ云フ u -平面ハ如何ナルモノデアラウカ?

之ガ幾何学的ニ、Haantjes ノパスヲ説明スル鍵デハナカラ
ウカ?

吾々ハ以下之ニツイテ考ヘテミヤウ。

§ 3.

コノ曲面ハ H_n 即チ (2.1), (2.3) ヲモツ A_{n+1} ノ部分
空間デアル。ソシテ §1 デ考ヘタヤウニ $\Gamma_{\mathcal{L}}^{\mathcal{L}}$ ナル径数ヲモ
ツテキテ 丁度 H_1 ニ於ケル射影接続ノ径数ノヤウニ変リシ

カモ (1.10)カラ

$$H_{\dot{c}\dot{d}}^{\dot{x}} \equiv \partial_c B_{\dot{d}}^{\dot{x}} + \pi_{\dot{a}\dot{b}}^{\dot{x}} B_{\dot{c}\dot{d}}^{\dot{a}\dot{b}} - P_{\dot{c}\dot{d}}^{\dot{a}} B_{\dot{a}}^{\dot{x}} = 0$$

ヲ得ル。之ハリーマン幾何学デ云フ オイテースカウテン ノ
曲率テンソル ニ相当スル $H_{\dot{c}\dot{d}}^{\dot{x}}$ ガ 0 ト云フコトデアル。
云ヒカヘレバ、吾々ノ曲面ハ 全測地曲面 ナノデアル。

Haantjes ガ パス ヲ u -parameter デ表ハシタコト
ハ、パス ヲ全測地曲面デ表現シヨウトイフ下心ガアツ
タ爲カモ知レナイ、幸実 Dantzig ノ論文ヲ見ルト⁽³⁾
パスヲ *partial* 方程式ニトリ、 $H_{\dot{c}\dot{d}}^{\dot{x}} = 0$ デ表ハシテ
居ル。

サテ、ソレハサテ置キ

$$\dot{x}^{\dot{\lambda}} = x^{\dot{\lambda}} = B_{\dot{a}}^{\dot{\lambda}} u^{\dot{a}}$$

ダカラ、之ヲ $u^{\dot{a}}$ ニツキ共変微分スルト

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \dot{x}_{\dot{j}\dot{\mu}}^{\dot{\lambda}} B_{\dot{a}}^{\dot{\mu}} &= H_{\dot{a}\dot{b}}^{\dot{\lambda}} u^{\dot{a}} + B_{\dot{a}}^{\dot{\lambda}} u_{\dot{j}}^{\dot{a}} \\ &= B_{\dot{a}}^{\dot{\lambda}} u_{\dot{j}}^{\dot{a}} \end{aligned}$$

モウ一度之ヲ u^c デ共変微分シテ、

$$(3.2) \quad \dot{x}_{\dot{j}\dot{\mu}\dot{\nu}}^{\dot{\lambda}} B_{\dot{a}}^{\dot{\mu}} B_{\dot{c}}^{\dot{\nu}} = B_{\dot{a}}^{\dot{\lambda}} u_{\dot{j}\dot{b}}^{\dot{a}} \dot{x}_{\dot{c}}^{\dot{b}}$$

ダカラ

$$(3.3) \quad u_{\dot{j}\dot{b}}^{\dot{a}} \dot{x}_{\dot{c}}^{\dot{b}} = B_{\dot{\lambda}\dot{a}\dot{c}}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \dot{x}_{\dot{j}\dot{\mu}\dot{\nu}}^{\dot{\lambda}},$$

コノデ Gauss ノ方程式ヲ想ヒ出セバ

$$\begin{aligned} \pi_{\dot{a}\dot{c}\dot{d}}^{\dot{a}} &= B_{\dot{\lambda}\dot{a}\dot{c}}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} B_{\dot{d}}^{\dot{\omega}} \pi_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\omega}}^{\dot{\lambda}} - H_{\dot{a}\dot{c}}^{\dot{\lambda}} L_{(\dot{a})\dot{d}}^{\dot{a}} + H_{\dot{a}\dot{d}}^{\dot{\lambda}} L_{(\dot{a})\dot{c}}^{\dot{a}} \\ &= B_{\dot{\lambda}\dot{a}\dot{c}}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} B_{\dot{d}}^{\dot{\omega}} \pi_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\omega}}^{\dot{\lambda}}, \end{aligned}$$

カクシテ

$$u_{;e)c} + \pi_{\hat{a}cd} u^a = B_{\lambda \hat{a}c}^{\alpha \mu \nu} (\beta_{\hat{\mu}j\nu}^{\lambda} + \pi_{\hat{\mu}\nu w} \xi^w) \\ = 0$$

又 (3.1) カラ $u_{;a}^a = \delta_a^a$

コレヲニツノ結果ノ云フトコロハ吾々ノ曲面ガ u^a ノ方向ニ
擬似相称ヲ許容スルトイフコトデアル。

シカモ亦 $\pi_{\hat{a}cd} u^a = 0$

之カラ Haantjes ガヤツテ平ルヤウニ 非幾何學的ニ (代
數的ニ)

$$\pi_{\hat{a}cd} = 0$$

トナル。

カウシテ、トモ角モ、Haantjes ガパス ト呼ビ論及シ
テ平ルトコロハ、更ニハツキリト、幾何學的ニ述べ換ヘテレ
ヨウト云フモノデアル。

即チ Haantjes ノパス トハ A_{n+1} ト云フ擬似接続
空間ニ特殊性ヲ与ヘタ空間デ考ヘテミルト、全測
地曲面デアル上ニ擬似相称ヲ許容シ、平坦デアル。

ト云フノデアル。

文中ノ角ニシルシタ (1), (2), (3) ハ次ノ論文ヲ示ス。

- (1) J. Haantjes : On the projective geometry
of paths, proc. Edinburgh Math. Soc.
5 (1937), 103-115.
- (2) K. Yano : Les espaces à connexion
projective et la géométrie des paths.

Thèse, Paris, (1938).

- (3) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n -dimensionaler Räume.

Math. Annalen, Band 106, (1932).

—冬至道 7— 1944 —