



Title	Jversen-Grossノ定理ノ擴張
Author(s)	遠木, 幸成
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(1), p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75136
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1. Inversen-Gross / 定理 / 拡張

遠木幸成 (阪大)

(9月27日受付)

$w = f(z)$ が領域 D で一価有理型トシ、境界上ノ一点ヲ z_0 トシ $z_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} z$ スル D 内ノニツノ連続曲線ヲ Γ_1, Γ_2 トスル。

若シ領域 D ノ境界ガ只一ツノ Jordan Curve カラナルトキハ Inversen-Gross ノ定理トシテ次ノコトガ知ラレテ平ル。即チ

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Gamma_1}} f(z) = \alpha, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Gamma_2}} f(z) = \beta \quad (\alpha \neq \beta) \quad \text{ナルトキハ}$$

z_0 ノ近傍ニテ $w = f(z)$ ハ全 w 平面カラ高々ニツノ値ヲ除イタ残リノ他ノスベテノ値ヲ無限回トル。

吾々ハ D ノ單連結性ヲ仮定セズニ一般ノ領域ニツイテ考ヘルコトニスル。

又平面上ノ一ツノ領域 D ト一ツノ円環領域 E ; $0 < r_2 < |z - z_0| < r_1$ トノ共通部分ハ高々可附番値ノ領域ヨリナルコトハ明ラカデアルガ若シ E ノ中ノアル領域ノ境界ガ円周 $C(r_1)$; $|z - z_0| = r_1$ 及び円周 $C(r_2)$, $|z - z_0| = r_2$ ノ各々ト共通点ヲモツトキソノ領域ヲ領域 D ノ z_0 ヲ中心トスル切断半径 r_1, r_2 ($r_1 > r_2$) ナル

Modul M ($M = \log r_1/r_2$) ノ切断領域, 或ハ單ニ Modul M ノ切断領域ト呼ビ $\Delta_{r_1 r_2}$ 又ハ Δ_M デ表ハス。

円周 $C(r)$ $|z - z_0| = r$ ($r_1 > r > r_2$) ト Δ_M ノ共通部分ハ高々可附番値ノ円弧ノ和デアルガソノ $w = f(z) = \gamma$ ノ像曲線ノ長サヲ $L(\Delta_M, r)$ デ表ハシ特ニ $C(r_1)$; $|z - z_0| = r_1$ ($i=1, 2$) ト Δ_M ノ境界ノ共通部分ノ像ノ長サヲ同様ニ $L(\Delta_M, r_i)$ ($i=1, 2$) デ表ハスコトニスル。亦領域 Δ_M ノ $w = f(z)$ ニヨル像面積ヲ $A(\Delta_M)$ デ表ハス。但シ長サ及び面積ハ半径 $\frac{1}{2}$ ノ Riemann 球上デ計ルモノトスル。

Lemma

切断半径 r_1, r_2 及 $M = \log r_1/r_2$ 及 Δ_M 及 $A(\Delta_M)$ 及 $L(\Delta_M, r_i)$ ($i=1, 2$)

ノ切断領域ヲ Δ_M トスル。若シ Δ_M ヲ

ソノ同一ノ z_0 上ニ有スル切断円弧ノ $w = f(z) = \gamma$

像曲線ノ長サガ常ニ正数 $\ell (>0)$ ヨリ大ナルトナ
 $M \geq 18\pi \ell^{-2}$ ナラバ Δ_M ノ部分切断領域 Δ_M ガ存
 在シテ次ノ條件ヲ満足スル。即チ Δ_M ハ r_1', r_2' ヲ
 切断半径トシ (但シ $r_1 > r_1' > r_2' > r_2$)
 $M' = \log \frac{r_1'}{r_2'} \geq \frac{1}{3} M$, $L(\Delta_M, r_1') < A(\Delta_M)^{\frac{2}{3}}$ ($i=1, 2$)

(証明) 像曲線ノ長サ $L(r)$ ト像領域ノ面積 $A(r)$ トノ関
 係ハ Schwarz ノ不等式ヨリ導カレル次ノ不等式ガ
 アル。即チ

$$\log \frac{r}{r_2} \leq 2\pi \int_{r_2}^r \frac{dA(r)}{L^2(r)} \quad (1)$$

今 $L(r) \geq \ell$ ナラバ

$$\log \frac{r}{r_2} \leq \frac{2\pi}{\ell^2} A(r) \quad (2)$$

若シ (1) = 於テ $L(r) \geq A(r)^{\frac{2}{3}}$ ナラバ

$$\log \frac{r}{r_2} \leq 2\pi \int_{r_2}^r \frac{dA(r)}{A(r)^{\frac{4}{3}}} = 6\pi \left[\frac{1}{A(r_2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{A(r)^{\frac{1}{3}}} \right] \leq 6\pi A(r_2)^{-\frac{1}{3}}$$

今 r_3, r_4 ヲ $\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2} = \frac{r_2}{r_4}$ ナル如ク選ビ切断半径 r_3, r_4 ナル
 Modul $\frac{1}{3} M$ ノ切断領域 $\Delta_{r_3 r_4}$ ヲ作レバ (2) ヨリ

$$\frac{1}{3} M \leq \frac{2\pi}{\ell^2} A(\Delta_{r_3 r_4})$$

$$\therefore A(\Delta_{r_3 r_4}) \geq \frac{M \ell^2}{6\pi} \quad (4)$$

次ニ切断半径 r_3, r_2 ナル Modul $\frac{2}{3} M$ ノ切断領域 $\Delta_{r_3 r_2}$

ヲ考ヘ $r_0 = r_4$, $r = r_2$ トオケバ $\log \frac{r}{r_0} = \frac{1}{3} M$

又 (4) ヨリ $A(r_0) = A(\Delta_{r_3 r_2}) \geq \frac{M \ell^2}{6\pi}$

ナル故ニ若シ $r_4 < r < r_2$ ナル r = 對シテ常ニ

$$L(\Delta_{r_3 r_2}, r) \geq A(\Delta_{r_3 r_2})^{\frac{2}{3}}$$

ナラバ (3) = ヨリ $\frac{1}{3} M \leq 6\pi \left\{ \frac{M \ell^2}{6\pi} \right\}^{-\frac{1}{3}}$

$$M < 18\pi \ell^{-2}$$

從ツテ仮定ニ矛盾スル故ニ $r_4 > r_2' > r_2$ ナル r_2 ガ存在
 シテ

$$L(\Delta_{r_2, r_2'} < A(\Delta_{r_2, r_2'})^{\frac{2}{3}}$$

トナル。同様ニ $r_1 > r_1' > r_2$ ナル r_1' が存在シテ

$$L(\Delta_{r_1, r_1'} < A(\Delta_{r_1, r_1'})^{\frac{2}{3}}$$

從ツテ $L(\Delta_{r_i, r_i'}, r_i') < A(\Delta_{r_i, r_i'})^{\frac{2}{3}} \quad (i=1, 2)$

(証了)

定理

$w = f(z)$ ヲ領域 D デ有理型トスル。 D ノ境界上ノ一處ヲ z_0 トスルトキ D 内ノ某カラ z_0 ニ收斂フル互ニ交ラヌニツノ道 Γ_1, Γ_2 ガアル。

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Gamma_1}} f(z) = \alpha, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Gamma_2}} f(z) = \beta \quad (\alpha \neq \beta)$$

トシ D ヨリ Γ_1, Γ_2 ヲ除イタ残リノ領域ヲ D' トスルトキ次ノ條件 i) ii) ヲ満足スル領域 D' ノ z_0 ヲ中心トスル可附番無限 (i) ノ切断径 $r_{2i-1}, r_{2i} \quad (i=1, 2, \dots)$ ノ Modul $M_i \quad (M_i = \log \frac{r_{2i-1}}{r_{2i}})$ ノ切断領域 Δ_{M_i} ガ存在スルナラバ $w = f(z)$ ハ z_0 ノ近傍ニテ全 w 平面上ノ高々ニツノ値ヲ除ケバ他ノスベテノ値ヲ無限回トル。

i) $\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \infty$

ii) 各 Δ_{M_i} ハ互ニ共通点ヲモタヌ單連結ナ領域デソノ境界バ半径 r_{2i-1}, r_{2i} ノ円弧ヲ結ブ Γ_1 及 Γ_2 ノ部分ヲ含ムモノトス。

(証明) 若シ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ノニツノ除外値ガアルトスルハ十分大ナル正数 N_1 ヲトレバ $i > N_1$ ナラバ Δ_{M_i} = 於テハ $w = f(z)$ ハ最早 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ノ値ヲ全然トラナイ。

先ツ $\alpha \neq \gamma_i, \beta \neq \gamma_i \quad (i=1, 2, 3)$ トスル若シ然シサル場合モコノ場合ト全ク同様ニ証明出来ルコトハ容易ニワカルデアラウ。

$\alpha, \beta, \gamma_i \quad (i=1, 2, 3)$ ノ相互ノ距離ノ最小ナモノヲ ρ トスル。今十分大ナル正数 N_2 (但シ $N_2 \geq N_1$) ヲトレバ $i > N_2$ ナルスベテノ i ニ對シ Δ_{M_i} ノ境界ニ屈スル Γ_1 上ノ某 z' $w = f(z')$ ニヨル像 w ハステ $|w - \alpha| < \frac{\rho}{4}$ $|w - \beta| < \frac{\rho}{4}$ ヲ満足スルヨウニ出来ル。故ニ因 $C(\rho)$ $|z - z_0| = r$ (但シ $r_{2i} < r < r_{2i+1}$) ト Δ_{M_i} トノ共通部分弧

$\frac{1}{2} \pi$ 以上、 $\frac{1}{2} \pi$ 未満の角を有する点 z は $|z| > N_2$ ならば $L(\Delta_{M_2}, r) > \frac{1}{2}$ デアル。従って円板 $|w-\alpha| \leq \frac{1}{4}$ 及び円板 $|w-\beta| \leq \frac{1}{4}$ の原像を Δ_{M_2} から除いた残りの二つの切断領域を Δ'_{M_2} とすれば $L(\Delta'_{M_2}, r) \geq \frac{1}{2}$ が満足する Δ'_{M_2} が必ずある。従って $\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \infty$ より十分大なる正数 N_3 (但し $N_3 \geq N_2$) をとれば $|z| > N_3$ かつ $M_i \leq 18\pi (\frac{1}{2}r)^{-\frac{1}{2}}$ が成立し Lemma 2 より $\bar{M}_i \geq \frac{1}{3} M_i$ かつ如き Δ'_{M_i} の M_i 個の $\bar{M}_i$ 個の部分切断領域 $\Delta_{\bar{M}_i}$ が存在して

$$L(\Delta_{\bar{M}_i}, r_{2i-1}) + L(\Delta_{\bar{M}_i}, r_{2i}) \leq 2A(\Delta_{\bar{M}_i})^{\frac{2}{3}} \quad (5)$$

今全 W 平面より円板 $|w-\alpha| \leq \frac{1}{4}$, $|w-\beta| \leq \frac{1}{4}$ 及び $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を除いた面を Grundfläche として $\Delta_{\bar{M}_i}$ の Überlagerungsfläche とし、Characteristic の $S(\Delta_{\bar{M}_i})$ とし $\Delta_{\bar{M}_i}$ の平均枚数を S_i 又 Relative Rand の L_i とすれば Ahlfors の基本定理より

$$S(\Delta_{\bar{M}_i}) \geq 3S_i - kL_i \quad (6)$$

然るに Δ_{M_i} は単連結な故に Δ_{M_i} の境界ハッチの境界をスベテ内部に含む如き円板の二つの境界を除いては $|w-\alpha| = \frac{1}{4}$ 或は $|w-\beta| = \frac{1}{4}$ の原像デアル。故に $|w-\alpha| = \frac{1}{4}$ 及び $|w-\beta| = \frac{1}{4}$ 上の平均枚数より大デナイ。従って Ahlfors の定理より $2(S_i + kL_i)$ より小デアル。故に

$$S(\Delta_{\bar{M}_i}) < 2(S_i + kL_i)$$

これを (6) に代入して

$$2(S_i + kL_i) > 3S_i - kL_i$$

$$\therefore 0 > S_i - 3kL_i$$

(5) 及び $S_i = \frac{1}{\pi} A(\Delta_{\bar{M}_i})$ を代入すれば

$$0 > \frac{1}{\pi} A(\Delta_{\bar{M}_i}) - 6k A(\Delta_{\bar{M}_i})^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore 0 > 1 - 6\pi k A(\Delta_{\bar{M}_i})^{-\frac{1}{3}} \quad (7)$$

然るに $\bar{M}_i \geq \frac{1}{3} M_i$ かつ故に $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{M}_i = \infty$ 従って $\lim_{i \rightarrow \infty} A(\Delta_{\bar{M}_i}) = \infty$ 故に十分大なる N (但し $N > N_3$)

ナトレバ $i > N$ 対シ

$$\delta \pi h \{A(\Delta M_i)\}^{-\frac{1}{3}} < 1$$

トナル。コレハ(7)ニ矛盾スル。故ニ $i > N$ ナルトキ $W = f(2)$ ハ ΔM_i デ高々ニツノ値ヲ除イタ他ノスベテノ値ヲ少クトモ一回ハトル。然ルニ E_0 ノ近傍ハ無限ノ ΔM_i ヲ含ム故ニ定理ハ成立スル。

次ニ $\alpha = \gamma$ ナルトキハ上ノ証明デ Grundfläche トシテ全 W 平面ヨリ $|W - \alpha| \leq \frac{\rho}{4}$, $|W - \beta| = \frac{\rho}{4}$, $\delta_2 - \delta_3$ ヲ除イタモノヲトレバヨイ。ソノトキ ΔM_i ヨリ $|W - \alpha| \leq \frac{\rho}{4}$

原像ヲ除イテモ Characteristic ハ変ラナイ。何故ナレバ ΔM_i ハ單連結デアルカラソレカラ $|W - \alpha| \leq \frac{\rho}{4}$ ノ原像ヲ除イタトキ若シ複連結ナ切断領域ガ出来タトスレバ一番外ノ境界ヲ除キ他ノ境界ハ閉ルヲエテ而ヒ $|W - \alpha| = \frac{\rho}{4}$ ノ原像デアル。従ンテソノ境界ニヨリ圍マテキル領域ハ $|W - \alpha| < \frac{\rho}{4}$ ノ原像デアル故ニ α 具カ存モナルコトニナリ $W = f(2)$ ハ ΔM_i デ $\alpha = \gamma$ ヲトシヌトニ矛盾スル。故ニ $f(\Delta M_i) < S_i + h L_i$ トナリ(7)ガ成立スルコトニナル。

其他ノ場合モ同様ニ証明サルコトハ明ラカデアラウ。(証了)

注) D ガ單連結 + Jordan 領域ナルトキハ條件(1)ノ満足スル ΔM_i ガトレルコトハ明ラカデアルカラコノ定理ハ明ラカニ Inversen-Gross ノ定理ノ拡張デアアル。亦集積値集合ニ於テ $S_2^{(D)} = S_2^{(P)}$ (但シアハ D ノ境界トス)ノ除外値ハ能ハ先生ノ定理ニヨリ漸近値ル故ニ除外値ガニツアレバ全 W 平面ノ他ノ値ハスベテ無限回トルトイフ結果ガ出クル。コレモ單連結ノ場合ハ Inversen-Gross ノ定理ノ拡張デアアル。

尚單連結ノ場合ノ証明ハ上ノ証明カラ容易ヲカサウニ切断領域ナル概念ヲ用ヒズ從ツテ Lemma 用ヒテ Ahlfors, Überlagerungsfläche = 写入基本定理ガケデ簡單ニ証明サレル。