OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	(1,1,・・・・・,1)型有限Able群ノsubgroupノ相互関係（I）
Author(s)	木下, 佳壽
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(1), p. 6-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75137
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

2. $(1,1,\cdots;1)$型有限Abel群ノsubgroupノ相互関係(I)

(阪大) 木下佳壽

(9月27日受付)

必要ガアツテ有限Abel群ノsubgroup及ソノ相互ノ関係ニツイテ考ヘタノデ之ヲ書キマス。

ココテハAbel群ノorderガp^nデ$(1,1,\cdots,1)$型ノ場合ヲ記シマス. コレハ一般ノ型ノ場合ノ基礎トナリマス。コノトキorder p^{n-1}, ノ数ハ

$$\frac{\prod_{i=0}^{n-2}(p^n-p^i)}{\prod_{i=0}^{n-2}(p^{n-1}-p^i)}=p^{n-2}+p^{n-2}+\cdots\cdots+R+1$$

デスガ之ヲ始ノAbel群Gノ Baseデ書ケバ次ノ様ニナル。

勝手ノ一組ノBase $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ヲ取リ之ヲ基ニシテ考ヘル時 $b_1^{x_1}b_2^{x_2}\cdots b_n^{x_n}$ $(x_1\not\equiv 0\ (p))$ デ生成サレル巡回群ヲ Speltenvektor $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ デ表ハシ互ニ独立ナ二組ノBase $(b_1^{x_1^{(1)}}b_2^{x_2^{(1)}}\cdots b_n^{x_n^{(1)}})$ 及 $(b_1^{x_1^{(2)}}b_2^{x_2^{(2)}}\cdots b_n^{x_n^{(2)}})$ デ生成サレルAbel群ヲ $\begin{bmatrix}x_1^{(1)}&x_1^{(2)}\\x_2^{(1)}&x_2^{(2)}\\\vdots&\vdots\\x_n^{(1)}&x_n^{(2)}\end{bmatrix}$ デ表ハシ以下同様ニ $\begin{bmatrix}x_1^{(1)}&x_1^{(2)}&\cdots&x_1^{(i)}\\x_2^{(1)}&x_2^{(2)}&\cdots&x_2^{(i)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n^{(1)}&x_n^{(2)}&\cdots&x_n^{(i)}\end{bmatrix}$ ヲ定義スル。コノ(n,i)型ノ行列ニツキ次ノ性質ヲ假定スル。

(A) pヲmodulusトスル有理整数ノElementヲモツi次ノ行列デdeterminant$\not\equiv 0\ (p)$ノモノヲ右乗ジテモコノ行列ハ変ラナイ。

特別ノ場合トシテ

(イ) 同一列ノElement全部$=\bmod p$デ0トincongruentナ有理整数ノカケテモ行列ハ変ラナイ。

(ロ) λ l列 $\equiv k(\not\equiv 0)$ヲ掛ケテλ m列ニ加ヘテモ行列ハ変ラナイ。

(ハ) λ l列トλ m列トヲ交換シテモ行列ハ不変。

之等ノ性質ヲ假定スルノハ determinant ≠ 0 (p) ナル t 次ノ行列ヲ右乗スレバ (n,i) 型ノ行列デ表ハサレルAbel群ノAutomorphismヲ與ヘルノダカラ當然デアル。

(B). (n,i) 型ノ行列デハ $n \geqslant i$, rank $= i$.

之ハ p^n 次ノAbel群デ i 個ノ独立ナ Element ヲトツテ Base トシタノダカラ當然デアル。

コノ(A), (B)ノ假定ノ下ニ p^{n-1} 次ノ互ニ相異ル subgroup (即 (n,i) 型ノ行列ノ中(A)ノ意味デ異ルモノ)ヲ見出ス。

Satz 1. p^{n-1} 次ノ subgroup ハ次ノ $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ ノ何レカノ形ノ行列デ表ハサレル group デアリ之等ノ $p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1$ 個ノ行列(デ表ハサレル群)ハ互ニ(A)ノ意味デ相異ル。即 E_i ヲ i 次ノ單位行列トスル時

$$\left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right]$$

(λ_j ハ mod p ノ有理整数) ノ形ノ p^i 個ノ悉クハ0ナラズトス

行列ヲ e_i $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ トスル。

特ニ

$$\left(e_0 = \left[\begin{array}{c|c} 0,0\cdots\cdots 0 & \\ \hline & E_{n-1} \end{array}\right], \quad e_{n-1} = \left[\begin{array}{c} E_{n-1} \\ \hline \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n-1} \end{array}\right] \right)$$

之ヲ証スルノニ二ツノ階段ニ分ケル。即 p^{n-1} 次ノ部分群ノ行列ヲ G_{n-1} トカク時

(1) G_{n-1} ハ $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ ノ何レカノ形デアリ, 逆ニ, $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ ノ形ノ行列ハ G_{n-1} ノ一ツノ行列デアル

(2) e_i ノ形ノ行列ノ間ニハ同ジモノナク e_i ト e_k $(i \neq k)$ ノ形ノ行列ノ間ニモ同ジモノナシ。同ジトハ(A)ノ意味ニ於テ。

(証) (1)ノ証。逆ノ方ハスベテノ λ_j が0-congruent ナコトヨリ(行列ノ rangeが $n-1$ トナル)ヨリ明示ス。G_{n-1} デ(以下 mod p ヲ書ク事ヲ省略) $\chi_1^{(j)}$ ノ

ノ キ ヅ ケ ニ ノ ・ ・ ・ ト ナ イ 時 ト ニ 分 ケ テ 考 フ。

(α) スベテノ $x_1^{(j)}$ 丰0ノトキ：G_{n-1} デオ一行ハ皆 ≡0デ G_{n-1} ノrangハ $n-1$ ((B)) ダカラ $x_2^{(j)}$ $(j=1,\cdots,n-1)$ ノ中丰0 ナモノガアル。コノ内 j ノ最小ヲ k トシテ $y_2^{(k)}x_2^{(k)} \equiv 1$ ナル $y_2^{(k)}$ ヲトリ オK列ガ $y_2^{(k)}x_\ell^{(k)}$ $(\ell=2,\cdots,n)$ ナル行列ヲ考ヘレバ (A) ノ (1) =ヨリ

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \overset{\text{オK列}}{0} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & y_2^{(k)}x_3^{(k)} & \cdots & * & * \\ & & \cdots & y_2^{(k)}x_4^{(k)} & \cdots & & \\ & * & & \vdots & & * & \\ & & & y_2^{(k)}x_n^{(k)} & & & \end{bmatrix}$$

＊ノ部分ハ mod p ノアル rational integer ヲ示ス

次ニオK列ニ $-x_2^{(k+1)}, -x_2^{(k+2)}, \cdots, -x_2^{(n-1)}$ ヲ乗ジテ順次オK+1列，オK+2列，…，オn-1列ニ加ヘテ[(A)ノ(ロ)]後オ一列トオK列ヲ交換シテ[(A)ノ(ハ)]

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \overline{x}_3^{(1)} & \overline{x}_3^{(2)} & \cdots & & \overline{x}_3^{(n-1)} \\ \cdots & & & & \\ \overline{x}_n^{(1)} & \overline{x}_n^{(2)} & \cdots & & \overline{x}_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

次ニrankガ $n-1$ ダカラオ3行ニオ一列以外デ丰0ナモノガアル。之ヲ $\overline{x}_3^{(\ell)}$ トス（ℓ ハ此ノ如キ番号ノ最小ノヲトル。$\ell \neq 1$）$y_3^{(\ell)}\overline{x}_3^{(\ell)} \equiv 1$ ナル $y_3^{(\ell)}$ ヲトリオℓ列ヲ $y_3^{(\ell)}$ 倍シテ得タ行列デ，オℓ列ニ $-\overline{x}_3^{(1)}, -\overline{x}_3^{(\ell+1)}, -\overline{x}_3^{(\ell+2)}, \cdots, -\overline{x}_3^{(n-1)}$ ヲ乗ジテオ一列，オ$\ell+1$列，…，オ$(n-1)$列ニ加ヘオ2列トオℓ列ト交換シテ

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & & \cdots & * \\ & & * & & \end{bmatrix}$$

＊ハ上述ト同ジ

行列 G_{n-1} ノrankガ $n-1$ ダカラオ3行以下ノ各行デ必ズ上記如キ丰0ナ Element ガアル（オ1行デハ $x_1^{(m)}$ 丰0 $m \geq 1$）テ，コノ手順ガオ4行以下ニ繰返サ

レテ逆ニ

$$G_{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & E_{n-1} & \end{bmatrix}$$

トナル。

(b) アル $x_1^{(j)}$ 非0ノトキ コノ j ノ中デ最小ノ番號 k ヲトリ $y_1^{(k)}x_1^{(k)}\equiv 1$ ナル $y_1^{(k)}$ ヲトリ非 j 列ヲ $y_1^{(k)}$ 倍シ[(A)ノ(1)]後ヤ k 列ノ $-x_1^{(k)}$ 倍, $-x_1^{(k+1)}$ 倍, …, $-x_1^{(n-1)}$ 倍ヲヤ $k+1$ 列, ヤ $k+2$ 列 … 非 $(n-1)$ 列ニ加ヘ[(A)ノ(n)]後ヤ1列ト非 k 列ト交換(IA)(n))スレバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & x_2^{(1)} & 0 & \cdots & \cdots \\ x_2^{(n-1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \cdots & x_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

非ゼロ以下ノ Element ヲ新ニ $x_i^{(j)}$ トシテ

(b1) 次ニ第2列以下ノ element ノスベテガ非ゼロ行デアルカ0ナル時ハ rank ガ $n-1$ ノタメ非3行ヲ於ケル非2列以下ノ Element ノ中非ゼロノモノガアリテソレデ(a)ト同様ノ手順ヲ施セバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ & & * & & \end{bmatrix}$$

rank $=n+1$ ナル立ニ、時ヤ3行 k ヲ k_1 ニテ $x_i^{(m)}$ 非0, 第2列1ナル x_i ガ他ノ多行デアルト同様ノ手順ヲ施セバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & E_{n-2} & & \end{bmatrix} \in k_1$$

(b2) 非2列以下ノ element ノ中非ゼロ行デ非0ナモノガアレバ(a)ノ場合ト同様ノ手順ニヨリ

$$G_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \chi_3^{(1)} & \chi_3^{(2)} & \chi_3^{(3)} & \cdots & \chi_3^{(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \chi_n^{(1)} & \chi_n^{(2)} & \chi_n^{(3)} & \cdots & \chi_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

コノ時第3行ニツキ第3列以下デ非0ナモノヲ捜スモシ第3列以下デスベテノ element $\equiv 0$ ナラバ (b1) ト

$$G_{n-1}=\left[\begin{array}{c|c} E_2 & 0 \\ \hline \lambda_1\ \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & E_{n-3} \end{array}\right] \in \ell_2$$

モシ第3列以下デ非0ナモノガアレバ (a) ト同様ノ手順デ

$$G_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ & & * & & \end{bmatrix}$$

（*ノ意味ハ前ト同ジ）

第第4行以下デ同様ノ手順ヲ行フ。第k行デ第k列以下（即チ列ノ番号 $>k$ ナル列）ニ非0ナルモノガ存在スルコトガコノ手順デ $k=1,\cdots,n$ マデ起リ第 $n+1$ 行デ始メテ第 $n+1$ 列以下ニ非0ナルモノガナイ時ハ第 $n+1$ 行テ (b1) ノ手順テ行ヘバ以下ノ行デaノ手順ノミガ起ルコトガ rang $n-1$ ナルコトヨリ分ル。

従テコノ場合ハ

$$G_{n-1}=\left[\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline \lambda_1 \cdots \lambda_k & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-k} \end{array}\right] \in \ell_k$$

デアル　即チ上デ G_{n-1} ハ $\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_{n-1}$ ノ何レカノ形デアルコトガ分ル。

(2) ℓ_i ハ $\lambda_1, \cdots, \lambda_i$ ノ各ニ p ヲ modulus トスル p 個ノ値ヲ代入スルコトニヨリ p^i 個ノ行列ヲ含ムガ之等ハ互ニ相異ル group ヲ表ハス。今

$$\begin{bmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \mu_1 \cdots & \\ 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right] \begin{matrix} \lambda, \mu \text{ の} \\ \text{何れか} \\ n-1 \text{ 個} \end{matrix}$$

ナリトスレバ(A)ヨリ p ヲ法トスル有理整数ヲ成分トスル determinant $\neq 0$ ノ行列 (a_{ik}) ガ存在シテ

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1} \cdots a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \mu_1 \cdots \mu_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right)$$

デアル。サテ

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1\,1} \cdots a_{n\,1\,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1\,n-1} \\ a_{i1} & a_{i\,n-1} \\ b_1 & b_{n-1} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,n-1} \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix}$$

コヽニ $b_l = \sum_{k=1}^{i} a_{kl}\lambda_k$ $(l = 1, 2, \cdots, n-1)$

従テ $a_{lm} \equiv \begin{cases} 1 & (l = m) \\ 0 & (l \neq m) \end{cases}$ $(l, m = 1, 2, \cdots, n-1)$

$\therefore$ $b_l \equiv \begin{cases} 0 & (l \geqq i+1) \\ \lambda_l & (l < i+1) \end{cases}$

即チヨリ上ノ行列ノ右辺ヲ比較シテ $\lambda_l = \mu_l$ $(l \leqq i+1)$

次ニ e_i ト e_k $(i \neq k)$ ノ間ニ同ジモノガアレバ $i > k$ トスル時（一般性ヲ失ハズ）

$$\left(\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right) \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,i-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1\,1} \cdots a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline \mu_1 \cdots \mu_k & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-k} \end{array}\right)$$

即チヨリ次ノ式ヲ得ル

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\,n-1} \\ b_1 & \cdots\ b_i\ \cdots & b_{n-1} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} \overset{第i+1列}{} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots \\ & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & 1 & 0 & \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_k & 0 & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} k行 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-1-k行 \end{matrix}$$

第$i+1$列　　第$i+1$列

而処デ第$(i+1, i)$ elementnnn対換シテ

$$b_i = 1$$

一方デ

$$b_i = \sum_{K=1}^{i} a_{Ki}\lambda_K \equiv 0 \quad (\because \text{トヨリ} a_{Ki} \equiv 0,\ K \leqq i)$$

之ハ矛盾デアル。

(Satz 1 証終)

今一般ニ$(1, 1, \cdots, 1)$型ノp^x次ノAbel群デp^{x-r}次ノ部分群ノ行列ノ形ガ分ツタトシテ之等ノ行列ヲ一括シテx, x_1rトカケバp^n次ノ$(1, 1, \cdots, 1)$型ノAbel群デp^{n-r}次ノ部分群ハ次ノSatz 2ニヨリ行列ノ形ガ分ル

Satz 2; p^n次ノ$(1, 1, \cdots, 1)$型Abel群デp^{n-r+1}次ノ部分群ノ形ガ(任意ニ與ヘラレタnニツイテ)既ニ分ツタトスレバp^{n-r}次ノ部分群ノ形ハ次ノ何レカノ形ニナル。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ n-1-k,\ n-r-k & \ell & & \vdots \\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-r-k} & & & 0 \\ \hline & 0 & & E_k \end{array}\right] \quad \begin{matrix}(k=0, 1, \cdots, n-r) \\ \lambda\text{ハ} \bmod p\text{ノ有理} \\ \text{整数} \\ x, x\ell = E_x\text{トス}\end{matrix}$$

($k=0$ノトキE_kノ行ハ消失シ$k=n-r$ノ時ℓノ行ハ消失スルモノトスル)

部分群ノ作ル lattice ノ diagram ヲ考ヘルノニハ$r=1$ノ時(Satz 1ノ時)ヲ考ヘテツギタセバヨイ。従ヒテ今p^{n-1}次ノ部分群トp^{n-2}次ノ部分群トノ間ノ包含関係ヲ調ベルノニSatz 1ヲ利用スル。(以下次回)