



Title	Banach spaceニ於ケル二次operatorニツイテ
Author(s)	清水, 辰次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(1), p. 21-24
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75141
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

6 Banach space = 於ける二次 Operator = ツイテ

陸大 清水辰次郎

(10月26日 21)

Banach 空間 (Complete normed linear space) なる linear operator の性質ハ著シク研究セラレタルガ 更に高次 operator 又解析的 operator = 因ニテハ Banach 門下及びアメリカ 於テ幾ツカノ研究ガアルガ 今ニテ函数空間論的研究ハ未ダアリ 發展シテ来ナシ。

次ニ二次音次多項式 Operator = 因スルニ三 性質ヲ尋ヨウ E, E' = 複素数ヲオペレータートスル Banach 空間トシ $x, y, \dots$ ヲ以テソノ要素, $\alpha, \beta, \dots$ ヲ以テ複素数ヲ表ハス

$p(x)$ ハ空間 E ヲ空間 E' = 空間 $\mathcal{E}$ operator トス。

定義. $p(\alpha x + \beta y) = \alpha p_1(x, y) + \alpha \beta p_2(x, y) + \beta p_1(x, y)$ 。

満足スル operator $p(x)$ ヲ二次音次多項式 operator トイフ。此所ニ $p_1(x, y)$ 等ハ $E \times E$ ヲ E' へ operator トシ $p_1(x, y)$ $p(x)$ 等ハ連続性ヲ假定シナシ。

先ノ定義ヨリ $\alpha = 1, \beta = 0$ トシテ $p_1(x, y) \equiv p(x)$
 $\alpha = 0, \beta = 1$ トシテ $p_1(x, y) \equiv p(y)$
 $\alpha = 1, \beta = 1$ トシテ $p_2(x, y) \equiv p_2(y, x)$

ナルヲ知ル。

定義ヨリ明らかニ $p(x + \alpha y)$ ハ α = 同ニテ連続ナルニ
 次ニ

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p(x + \tau y) - p(x)}{\tau} = p_2(x, y)$$

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad \text{トシテ,} \quad \xi = \tau \alpha, \quad \eta = \tau \beta \quad \text{トシテ}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p(x + \xi y_1 + \eta y_2) - p(x)}{\tau} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p(x + \xi y_1 + \eta y_2) - p(x + \eta y_2) + p(x + \eta y_2) - p(x)}{\tau} \\
&= \alpha p_2(x, y_1) + \beta p_2(x, y_2)
\end{aligned}$$

以上、 $p(x + \alpha y)$ が $\alpha \rightarrow 0$ へと連続になることが示される。 $p(x)$ の連続性を仮定して。

依って

$$p_2(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha p_2(x, y_1) + \beta p_2(x, y_2)$$

即ち $p_2(x, y)$ は x 及び y に関して一次斉次 operator である。
依って勿論

$$p_2(x, 0) = p_2(0, y) = 0$$

定理 1. 二次斉次多項式 operator が連続ならば有界である。

($x=0$ として連続ならば有界)

仮りに有界ならば、 $M_n \rightarrow \infty$

$$\|p(x_n)\| > M_n \|x_n\|^2 \text{ ならば}$$

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{M_n} \|x_n\|} x_n \text{ とおき } \|Y_n\| \rightarrow 0$$

$$\therefore p(Y_n) = \frac{1}{M_n \|x_n\|} p(x_n) > 1$$

然るに $x=0$ として $p(x)$ は連続な故

$$p(Y_n) \rightarrow p(0) = 0$$

定理 2. 二次斉次多項式 operator が有界ならば連続

先ず $x_n \rightarrow 0$ なる系列 x_n を考える

有界な故 $\|p(x_n)\| < M \|x_n\|^2$

依って $\|p(x_n) - 0\| < M \|x_n\|^2 \rightarrow 0$

即ち有界ならば、 $x=0$ として連続となる

一方二次齊次多項式 operator は

$$p(x+y) = p(x) + p_2(x, y) + p(y)$$

ト書き表ハサレルカラ, $y_n \rightarrow 0$ ナル系列 y_n ニ対シ $p(y) \wedge y=0$
ニテ連続且 $p(0)=0$ ナル故, 先ツ $p(y_n) \rightarrow 0$

$p_2(x, y)$ ハ x, y ニ関シ additive ナルヲ知ルコトカ

$$p_2(x, y) = p(x+y) - p(x) - p(y)$$

カラ有界, 即チ

$$\|p_2(x, y)\| < M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left(\because p_2\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) = p\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) - p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - p\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right)$$

$p(x)$ ノ有界カラ右辺ハ $M=7$ 上ニ有界セラル.

x ヲ一定トシテ考ヘレバ $p_2(x, y)$ ハ y ニ関シ連続ナル故

$$\lim_{y_n \rightarrow 0} p_2(x, y_n) = p_2(x, 0) = 0$$

依ツテ

$$p(x+y_n) = p(x) + p_2(x, y_n) + p(y_n)$$

ヨリ

$$p(x+y_n) \rightarrow p(x)$$

即チ $p(x)$ ハ連続ナル, 以上ニ証明ニテ明カナリ

定理 二次齊次多項式 operator ハ一実ニテ連続ナラバ
スベテ, 実ニテ連続ナル.

$$\text{附記} \quad p(\alpha x + \beta y) = \alpha^n p_1(x, y) + \alpha^{n-1} \beta p_2(x, y) + \dots + \beta^n p_{nn}(x, y)$$

ヲ以ツテ n 次齊次多項式 operator ヲ定義スレバ

$$p_1(x, y) \equiv p(x),$$

$$p_{nn}(x, y) \equiv p(y).$$

且, $p_2(x, y), p_3(x, y), \dots, p_n(x, y)$ ハ夫々 x, y ニ関シ一次, 二次, $(n-1)$ 次

$x = \text{関数}$ $(n-1)$ 次, $(n-2)$ 次, $\dots$ 一次, operator 以外が示
される. $p(x)$ が連続ならば, $p(x)$ は連続トハ限らる.

例 $p(x, y) = x^2 y$ の連続性 (Candy) 連続性を
示す.

$$p_j(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(x + \tau y)}{\tau^j} d\tau$$

加減

$$(C, \tau = 0 \text{ から } 2\pi i \text{ まで})$$

$$p_j(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(x + \tau y)}{\tau^j} d\tau$$

例 $p(x)$ が有界ならば

$$p_j(x, y) = 0$$

例

$$\|p_j(x, y)\| \leq M \|y\|^j$$

以上, 積分表示より

$$p_j(x, 0) = 0 \quad j = 2, 3, \dots, n$$

例

$$p(x + y_n) - p(x) = p_2(x, y_n) + \dots + p_{n-1}(x, y_n)$$

より $y_n \rightarrow 0$ ならば

$$p(x + y_n) \rightarrow p(x)$$

即ち n 次有次多項式 operator は有界ならば連続である。

連続ならば有界にもなる。一変の場合は連続ならば

一変の場合は連続にもなる。一次 operator 場合と同様を示

される

(以上)

