



Title	Euclidノ比ノ拡張ニ就イテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(2), p. 31-40
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75144
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

9 Euclidノ比ノ拡張ニ就イテ

東京文理大 河田敬義

(昭和20年1月30日受付)

本誌246号ニテ南雲博士ハ「正ノ量ト実数トニ關スル一考察」(談話1086)ニテ、正ノ量ノ体系 $\mathcal{Y}$ カラ、正数ヲ操作(Automorphism)ノ作ル半環トシテ定義シ、ソノ性質ヲ導イタ。§1デハ之ヲEuclidノ比ノ理論(例ヘバ Euclid, Die Elemente, Ostwald's Klassiker, Teil II, S. 17-36, Buch V (E.V. トシテ引用) 参照)ニ依リ(Schritt, Schritt)別証スル。

以上、一次元連続量ノ考察ニ対シテ、§2, 3デハ一般連続量ニ關スルEuclidノ比ノ理論ヲ考ヘル。コレハ一次元ノ場合ノ性質ヲ大部分保持スルカガ負ノ数ト合セテ体ニ拡張スルコトガ出来ナイノデ、コノ性質ガ一次元トイフコトノ特徴ヲ与ヘルコトニナル。内容トシテハ中野博士ノDilatatorノ特別ノ場合ニスヤナイ。一般連続量ヲ考ヘタノハ、ソレニヨリ普通ノ一次元トイフ性質カドコマデキイテソルカラ見ルタメデアツタケレドモ、ソノ自身トシテ、例ヘバ確率論的ノ量トカ経済的ノ量トカラ考ヘル場合ニハ、全然無用ノモノデハナイデアラウ。

§ 1

談話1086ノ初メノ部分ヲ繰返ス。

定義1

 G_0 次ノ公理 G_0 — G_5 ヲ満足スル集合 $\mathcal{Y}$ ヲ一次元的連続量ノ体系トス。 G_1 $\mathcal{Y}$ ニ x, y ニ対シテ、 $x+y \in \mathcal{Y}$ ガ一意ニ対応スル。 G_2 $x+y = y+x$ G_3 $(x+y)+z = x+(y+z)$ G_4 $x+y \neq x$ G_5 (一次元ノ公理) $\mathcal{Y}$ ニ x, y ニ対シテ、 $x = y+z$ カ $y = x+z'$ ノ一方ガ成立ス

(連続ノ公理) $\mathcal{Y} = A \cup B$, $A = \{a; \text{スベテ}, b \in B \text{ニ対シテ } a > b\}$
 $B = \{b; \text{スベテ}, a \in A \text{ニ対シテ } b < a\}$ ナルトキ、スベテ $a \in A$ ニ対シテ $a \geq x$,
 スベテ $b \in B$ ニ対シテ $b \leq x$ ナル $x \in \mathcal{Y}$ ガ只一ツ存在スル。コトキ
 $x = (A|B)$ トカフ。

但シ $x = y+z$ ノトキ $x > y$ ト記ス。

定理1

 $\mathcal{Y}$ ハ順序 $>$ ニ關シテ、完備線狀順序集合ヲ作り且ツ

$$x > y \iff x+z > y+z$$

定義 2

$$x = y + z \text{ トキ } z = x - y \text{ トカ}$$

定理 2

(稠密性) $x < y$ トハ $x < z < y$ ナル z ガアル

定理 3

 $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}$ 最大元モ最小元モナ

定理 4

(等分可能性) $x = \bar{x}$ ト $ny = x + y$ ガアル (n : 自然数)

定義 3

(E.V. 定義 4) x ト y トハ比較可能ナルトハ

$$mx > y, \quad ny > x$$

ナル自然数 m, n 存在スルコトヲイフ。

定理 5

(Archimedes 原則) $\mathcal{N}_1$ 任意ノ元ハ比較可能ナル。

以上ハ公理 G_5 カラ、歸結セラルカ、以下 (I) — (XIV) ナル最モ
Archimedes 原則 = ヨリ、 G_5 ヲ用ヒナシテモス。

定義 4

$\mathcal{N}_1$ ノ u, x ノ順序アル組 $(x; u)$ ナリ、 x, u = 対スル比 (Verhältnis)
(x ヲ u ヲ単位トシ測ツタ数量) トイフ。

定義 5

(E.V. 定義 5) $(x; u) = (y; v)$ トハ m 及 n 自然数
 m, n 存在シテ $mx = ny$ トナルコトヲイフ。

定義 6

(E.V. 定義 6) $(x; u) > (y; v)$ トハ、アル自然数組 m, n 存在シ
 $mx > nu, \quad my < nv$
トナルコトヲイフ。

(I) (E.V. § 1) $(x; u) = (y; v), (y; v) = (z; w) \Rightarrow (x; u) = (z; w)$ (II) $(x; u)$ ト $(y; v)$ ノ間ハ $>, =, <$ ノイッレカ只一ツカヲ滿シ得。(III) (E.V. § 13) $(x; u) = (y; v), (x'; u') = (y'; v'), (x; u) > (y; v) \Rightarrow (x'; u') > (y'; v')$ (IV) $(x; u) > (y; v), (y; v) > (z; w) \Rightarrow (x; u) > (z; w)$ (V) $(x; u) = (y; v) \Rightarrow (u; x) = (v; y)$ (VI) $(x; u) > (y; v) \Rightarrow (u; x) < (v; y)$ (VII) (E.V. § 7, 8, 9, 10) $x > y \Leftrightarrow (x; u) > (y; u)$ (VIII) (E.V. § 14) $(x; u) = (y; v)$ トハ $x \geq y \Leftrightarrow u \geq v$ (IX) (E.V. § 4) $(x; u) = (y; v) \Rightarrow (mx; nu) = (my; nv)$ (X) (E.V. § 12) $(x; u) = (y; v) \Rightarrow (x+y; u+v) = (x; u)$ (XI) (E.V. § 18) $(x; u) = (y; v) \Rightarrow (x+u; u) = (y+v; v)$ (XII) (E.V. § 16) $(x; u) = (y; v) \Rightarrow 1x; y = (u; v)$ (XIII) (E.V. § 22) $(x; u) = (y; v) \Rightarrow 1x; y = (u; v) \Rightarrow (x; v) = (x'; v)$

XIV) (E, V, §24) $(x; u) = (x'; u'); (y; u) = (y'; u') \Rightarrow (x+y; u) = (x'+y'; u')$

以上, Euclid, 証明ハヨリ知ラレテナル所ニ付カカ内ニアルイデアル法ノ性質ハ

$\Gamma_5 = \exists$ 不成立ス

XV) (第四比例項ノ存在) x, u, v ラチヘタル $(x; u) = (y; v)$ ナル y カノ
存在スル。

(証) $A = \{a; (x; u) < (a; v)\}$, $B = \{b; (x; u) \geq (b; v)\}$ トスルニ,
 A, B ハ Archimedes, 原則カラ空ヲナシコレヲ Schnitt $y = (A|B)$ ト作レバ
所ニ求メタル元ニ至ル。

247(VII) ヲ合セテ

XVI) $(x; u) > (y; v) \Leftrightarrow x' > y', (x; u) = (x'; w), (y; v) = (y'; w)$

定義 7 $\{(x; u); x, u \in \mathcal{V}\}$ ヲ定義 5 = ヨリ組合セテ, γ ノ全体ヲ $\mathcal{V}_1$ トスル

$\mathcal{V}_1 = \{\lambda; \lambda = (x; u)\}$ γ ノ内 $\gamma >$ ヲ定義 6 ニ依ルニ, 線状順序集合
トナル。

定義 8 $\mathcal{V}_1$ ニ $\lambda, \mu = \exists$ 付テ $\lambda = (x; u)$ $\mu = (y; u)$ トアラハスナキ
 $\lambda + \mu = (x+y; u)$

トアラハス。 (XIV) = 依リ代表ノトリヲ無関係ニ

又 $\lambda = (x; u)$ $\mu = (u; v)$ トアラハスナキ

$$\lambda \mu = (x; v)$$

トスル。 (XIII) = $\exists$ 代表ノトリヲ無関係ニ

定理 6

- (i) $\lambda + \mu = \mu + \lambda$
- (ii) $(\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$
- (iii) $\lambda \mu = \mu \lambda$
- (iv) $(\lambda \mu) \nu = \lambda (\mu \nu)$
- (v) $(\lambda + \mu) \nu = \lambda \nu + \mu \nu$
- (vi) $1 \lambda = \lambda 1 = \lambda$ ($\lambda \in \mathcal{V}_1$) ナル 1 , 存在
- (vii) $\lambda^{-1} \lambda = \lambda \lambda^{-1} = 1$ ナル λ^{-1} , 存在

(証) (i) ハ Γ_1 , (ii) ハ Γ_2 = 歸セラル。 (iv) $\lambda = (x; y)$ $\mu = (y; z)$
 $\nu = (z; w)$ トスルニ, 左辺 = 右辺 = $(x; w)$ (v) $\lambda = (x; u)$ $\mu = (y; u)$
 $\nu = (u; v)$ トスル。 左辺 = $(x+y; v)$ (vi) $1 = (x; x)$

(vii) $\lambda = (x, u) = \exists z \text{ s.t. } \lambda^{-1} = (u; x)$ (V参照 (iii)) $\lambda = (x; y), \mu = (y; u)$
 ならば $\lambda\mu = (x, u) = \exists z \text{ s.t. } (x; y) = (u; z) \text{ となる } \mu\lambda = (y; z) \text{ (XII) } \exists z$
 $(x; u) = (y; z) \text{ であるから } \lambda\mu = \mu\lambda$

定理 7 $\mathcal{Y}, \exists u \Rightarrow$ 固定スル $(x; u) = \lambda \iff x = \exists$ $\mathcal{Y}, \vdash \mathcal{Y}, \vdash$

加法に同じ同型である

(証) 定義 8, (VII) = 3ル

定義 9 $\mathcal{Y},$ 自己同型 $x \mapsto \lambda(x)$ $\vdash$ $\mathcal{Y},$ $\mathcal{Y}$ 全体へ、一対一
 対応を

$$(*) \quad \lambda(x+y) = \lambda(x) + \lambda(y)$$

が満足スルモノイフ。 $\mathcal{Y},$ 自己同型半環 $\mathcal{Y},$ である

定理 8 $\lambda(x) \in \mathcal{Y},$ ならば, $(\lambda(x); x) = (\lambda(y); y)$ 即ち $\lambda \in \mathcal{Y}$
 が定スル 逆 = $\mathcal{Y}, \exists \lambda = \exists \text{ s.t. } \lambda = (y; x), \vdash$ $y = \lambda(x)$ となる
 $\lambda(x) \in \mathcal{Y},$ が定スル。 λ 対応は $1:1$ である, $\mathcal{Y}, \vdash \mathcal{Y}, \vdash$
 環同型である。

(証) 前半, $(*)$ $\vdash$ 定義 5 = 3ル $(x; y) = (\lambda(x); \lambda(y))$ 故に (XII)
 から $(\lambda(x); x) = (\lambda(y); y) \vdash$ 後半 $(X) = 3ル$ 環同型であるから定義 9
 = 3ル。

定理 9 $I_a = \{x; x < a\}$ 一般に $I_{a,b} = \{x; a < x < b\}$ である
 任意 $I_a \vdash I_{c,d}$ である 約数順序集合 $\vdash$ 同型である

(証) $x \mapsto x + (b-a)$ である $I_{b-a} \cong I_{a,b}$ 同様 $I_{d-c} \cong I_{c,d}$
 次 $x \mapsto \lambda(x)$ $\lambda = (b-a; d-c) = 3ル$ $I_{b-a} \cong I_{d-c}$ 。

定理 10 O は負の元を附ける $\mathcal{Y},$ 体 = 2つの拡張スル $\mathcal{Y}$ である
 1ル。

§ 2 $\mathcal{Y}, (\mathcal{Y},)$ かつ、実数、作ル 半環 $\vdash$ 同型であるから
 用スル。

§ 2

定義 10 次、公理 $G_0' \sim G_5'$ が満足スル集合 $\mathcal{Y}$ が一般連続
 量、体系 $\vdash$ 1ル。 $G_0' = G_0$ $G_1' = G_1$ $G_2' = G_2$ $G_3 = G_3$

G_4 (連続公理) $x > y \iff x = y + z$ とスル。 $\mathcal{V}$, 空でない集合
 A, B 対 $A = \{a\}$, スベテ, $b \in B \iff a > b$, $0 = \{b\}$ スベテ, $a \in A$
 $=$ 対 $a > b$ かつ $a \in A$, スベテ, $a \in A =$ 対 $a \geq x$, スベテ, $b \in B$
 $=$ 対 $x \geq b$ かつ $x \in \mathcal{V}$ が只一つ存在スル。コレヲ $x = (A|B)$
 ヲ表ハス。

G_5' 次ノ定義 11ノ意味ニ、単位元が存在スル。

定義 11 $e \in \mathcal{V}$ が単位ニアルトハ 任意ノ $x \in \mathcal{V} =$ 対 $nx > x$ ナル
 自然数 n 存在スルコトヲイフ。

単位元ノ全体ヲ $\mathcal{V}^*$ ニアラハス。単位元同志ハ定義 3 = ヲリ
 $\subseteq$ = 比較可能ナル。定理 2, 3, 4 ハ ソノマ、成立ツ。定理 4 カラ
 $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R} =$ 対 $\frac{m}{n}x \in \mathcal{V}$ が一意ニ定義サレル。 $G_4' =$ ヲリ正ノ
 実数 $\lambda, x \in \mathcal{V} =$ 対 $\lambda x \in \mathcal{V}$ 定義サレル 即チ

定理 11 正実数 $\lambda, x \in \mathcal{V} =$ 対 $\lambda x \in \mathcal{V}$ 一意ニ定義サレル。

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$$

$$1 \cdot x = x$$

G_4' カラ 又 次ノコトが成立ツ。

定理 12 $x > y \iff x = y + z, z \in \mathcal{V}$ ナル順序 = 実ニ $\mathcal{V}$ ハ 低算
 附完備束トナル 且 $x > y \iff \lambda x > \lambda y \iff x + z > y + z$ 満
 足スル

$\mathcal{V}^*$ ニハ $x > y$ ($x, y \in \mathcal{V}^*$) 同 $x = y + z, z \in \mathcal{V}$ ($z \in \mathcal{V}^*$ 同
 ハナイ) トスレバ, $G_0' \rightarrow G_5'$ が成立ツ。 $x < y$ 同 $\mathcal{V}^*$ 中 $x < y$ 同
 イハウ トスルナラバ $x > y \iff$ (i) $x \neq y$, (ii) $y = z + u, z, u \in \mathcal{V}^*$
 ナラバ $x = z + v, v \in \mathcal{V}^*$ トアラハサレルコトナリ。

定義 4' $\mathcal{V}^*/ \sim$ x, u ノ 順序アル 組 $(x; u)$ 同 $x; u =$ 対スル。

比トイフ 比ノ相等ノ定義ハ一次元ノ場合ト異ナルヲ以テ、
定義5ヲ修正ス。

定義11 $\mathcal{V}$ 中 $\mathcal{V}(x, y) = \{mx + ny\}$ トスル、 $(x; u) = (y; v)$
トハ $\mathcal{V}(x, u)$ ト $\mathcal{V}(y, v)$ トカ

$$mx + nu \Leftrightarrow my + nv$$

ナル対応ニシテ $\mathcal{V}$ 中於ケル順序ニ関シテ同型ナルコトヲイフ。

コレヲ拡張シテ、 $\mathcal{V}$ 中 $\mathcal{V}(x, y)$ トハ x ト y トカラ $+$, $\cup$, $\cap$, $-$
(但シ可能ト場合) ヲ有限回施シ得ラルル全体ヲアラハストキ

定義12 $\mathcal{V}^* \ni x, u, y, v =$ 対応 $(x; u) = (y; v)$ トハ $\mathcal{V}(x, u)$ ト
 $\mathcal{V}(y, v)$ トカ 同一語ヲ対応サセルトキ、一対一対応トナリ

(i) $A =$ 関シテ同型

(ii) $\cup$ 及 $\cap$ $=$ 関シテ同型

(iii) 相対スル元ハ互ニ比較可能

ナルコトヲイフ。

比ノ大小關係ハ直接ニ定義シ難イノヲ (XVI) $=$ 相等ニシ

定義13 $\mathcal{V}^* =$ 於ケル比 $(x; u) \in (I) (II) \text{---} (XV)$ 及 $\cap$

(II') $(x; u), (y; v)$ ノ間 $=, >, <, =$ 若ク同時ニ
成立ツコトハナシ。

カ成立ツ。

定義14 $\Lambda = (x; u)$ ($x, u \in \mathcal{V}^*$) ノ全体ヲ $\mathcal{V}^*$ トスルトナリ、
 $>$ カ等價ナルモノ組ノ算法トシテ定義8ニヨリ定義サレル

定理14 $\mathcal{V}^*$ ハ定理6ノ性質 (i) --- (vii) ヲ満足スル

定理15 $u \in \mathcal{V}^*$ ヲ定メタル、 $\Lambda = (x; u) \Leftrightarrow x \in \mathcal{V}^*$ 、対応
ヨリ、 $\mathcal{V}^* \text{ト} \mathcal{V}^* \text{トハ}$ 一対一ニ対応シ、加法及 $\cap$ 順序 $=$ 関シ
テ同型ナル

定義15 $\mathcal{V}$ 自己同型 $x \rightarrow \Lambda(x)$ トハ $\mathcal{V}$ 、 $\mathcal{V}$ 全体ハ、

一対一ニ対応シ (i) $\Lambda(x) + \Lambda(y) = \Lambda(x + y)$

(ii) $x \text{ト} \Lambda(x) \text{トハ}$ 定義8ニヨリ $\cap$ $=$ 比較可能

ナルコトヲイフ。

明 = カル自己同型全体 Ω^* ハ半環ヲ作ル。

$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \iff$ スベテ $x \in \mathcal{V} =$ 対シテ $\Lambda_1(x) \geq \Lambda_2(x)$
ト定義スル。(i) カラ

$$\Lambda(x \vee y) = \Lambda(x) \vee \Lambda(y)$$

$$\Lambda(\lambda x) = \lambda \Lambda(x)$$

モ成立ツ

定理 16 $\Omega^* \ni \Lambda(x)$ トラバ, $x, y \in \mathcal{V}^* =$ 対シテ

$$(\Lambda(x); x) = (\Lambda(y); y)$$

即チ $\mathcal{V}^*$ ノ元 $\Lambda = (\Lambda(x); x)$ ヲ定メル。逆 = $\Lambda \in \mathcal{V}^* =$ 対シテ,
 $u \in \mathcal{V}^* =$ ハ $\Lambda = (x; u)$ トアラハヌトキ = ハ, $\Lambda(u) = x$ トオケバ
ユノ対応ハ一義 = $\mathcal{V}$ 全体ノ自己同型 = 拡張サレル。ユノ Ω^*
ト $\mathcal{V}^*$ ノ対応ハ一対一ニ環同型及順序同型トナル。

定理 17 $I_{a,b} \cong I_{c,d}$ (順序 = 実シテ), $a, b, c, d \in \mathcal{V}^*$ (但シ $b-a,$
 $d-c \in \mathcal{V}^*$ トス.)

最後 =

定理 18 $\mathcal{V}^*$ カ体 = マデ拡張サレルハ $\mathcal{V}$ カ $\mathcal{V}_1$ ノ場合 = 限ル。

§ 3

之等ノ諸定理ヲ証明スル

K. Yoshida, On vector lattice with a unit, Proc. Imp. Acad. 18 ト全ク同様 =

定理 19 (i) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cong \{\lambda e\}$ ノ場合ヲ除イテ極大イデヤル $\mathcal{J}$ カ存在
スル。ユノ = $\mathcal{V}$ ノイデヤルトハ (i) $\mathcal{J} \ni x, y \Rightarrow \mathcal{J} \ni x+y$

(ii) $\mathcal{J} \ni x, x > y \Rightarrow \mathcal{J} \ni y$ (ii) $\mathcal{J} \neq \mathcal{V}$

(iii) $\mathcal{V}/\mathcal{J} = \mathcal{V}(\mathcal{J}) \cong \mathcal{V}_1$ ($\mathcal{J}$: 極大イデヤル) ノ対応ヲ

$$x \mapsto x(\mathcal{J}) \in \mathcal{V}_1$$

ヲトル。 (但シ $x \in \mathcal{J}, x = 0$ 形式的 = $\mathcal{V}$ 附加 0 ヲ対応サ
ル) (iv) 対応ハ +, $\vee, \wedge$ = 實シテ準同型トナル。逆 = 極大

イデアル / 全体 Ω トスル

$$x \longrightarrow \{x(\mathcal{I}) : \mathcal{I} \in \Omega\}$$

$\wedge, \vee, \neg$ = 同型トナル。特 = $x \in \mathcal{V}^*$ ハ如何ナル $\mathcal{I} = \emptyset$ 含マレタイカラ。 $x(\mathcal{I}) \in \mathcal{V}_1$ トナル。

次 = 前田 - 小笠原 「ベクトル束ノ表現 = ツイテ」 (広島文理大 紀要) ト同称 =

定理 20

$$x = \bigcup_n (x \wedge n y) \text{ , トキ } = x \prec y ;$$

$$x \prec y, y \prec x \text{ , トキ } = x \sim y$$

トスルト, $\mathcal{V}$ ハ $\sim$ = ヨリ 組ニ分ケラル, $\prec$ = ヨリ 組ノ内ノ順序ヲ考ヘルト, 完備 Boole 代数 $\mathcal{L}$ トナリ, 特 = $\mathcal{V}^*$ ヲ含ム組ハ $\mathcal{L}$ ノ最大元 1 トナル。

定理 21

$\mathcal{V}$ ノ 極大 イデアル $\mathcal{I}$ ト $\mathcal{L}$ ノ 素 イデアル $\mathcal{P}$ トハ 次ノ対

応 = ヨリ 一 対 一 = 対応スル。

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \in \Omega &= \text{対立} \quad \mathcal{P}(\mathcal{I}) = \{\bar{x} : x \in \mathcal{I}\} \text{ ハ } \mathcal{L} \text{ ノ 素 イデアル } (\bar{x} \wedge x \text{ ヲ 含ム組}) \\ \mathcal{P} &= \text{対立} \quad \mathcal{I}(\mathcal{P}) = \{x : x \vee \bar{x}, \lambda \in \mathcal{V}_1 = \text{対立} \quad \overline{x - (x \wedge \lambda e)} \in \mathcal{P}\} \\ &= \{x : x \vee \bar{x}, \lambda \in \mathcal{V}_1 = \text{対立} \quad \overline{\lambda e - (x \wedge \lambda e)} \notin \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

以上ノ結果ヨリ 次ノ 基本的 関係カ 成立ツ

定理 22

$x, u, y, v \in \mathcal{V}^*$ = 同型

$$(x : u) = (y : v) \iff (x(\mathcal{I}) : u(\mathcal{I})) = (y(\mathcal{I}) : v(\mathcal{I})), \quad \text{スベテ } \mathcal{I} \in \Omega$$

コノ 右辺ノ 比ヲ $\Lambda(\mathcal{I})$ ト表ハス。

$$(i) \quad (x : u) = (y : v) \text{ トスル}$$

$$\begin{aligned} m : x(\mathcal{I}) > n u(\mathcal{I}) &\iff (x - \frac{n}{m} u)(\mathcal{I}) \in \mathcal{V}_1 \iff x - \frac{n}{m} u \notin \mathcal{I} \\ &\iff \forall \lambda \in \mathcal{V}_1 = \text{対立} \quad \overline{\lambda u - (x - \frac{n}{m} u) \wedge \lambda u} \notin \mathcal{P}(\mathcal{I}) \end{aligned}$$

一方 定義 12 (ii) = ヨリ

$$\overline{\lambda u - (x - \frac{n}{m} u) \wedge \lambda u} = \overline{\lambda v - (y - \frac{n}{m} v) \wedge \lambda v} = \text{ヨリ}$$

$$\iff \forall \lambda \in \mathcal{V}_1 = \text{対立} \quad \overline{\lambda v - (y - \frac{n}{m} v) \wedge \lambda v} \notin \mathcal{P}(\mathcal{I})$$

$$\Leftrightarrow m y(\mathcal{I}) > n v(\mathcal{I}) \quad \text{全く同様} = m x(\mathcal{I}) = n u(\mathcal{I})$$

$$\Leftrightarrow m x - n u \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \overline{m x - n u} \in \mathcal{I}(\mathcal{I}) \Leftrightarrow \overline{m y - n v} \in \mathcal{I}(\mathcal{I})$$

$$\Leftrightarrow m y(\mathcal{I}) = n v(\mathcal{I}) \quad \text{以上合せて}$$

$$(x(\mathcal{I}) : u(\mathcal{I})) = (y(\mathcal{I}) : v(\mathcal{I})) \text{ トナル}$$

$$\text{逆} = u \in \mathcal{V}^* \text{ とき } \times \bar{}$$

$$x_u(\mathcal{I}) = (x(\mathcal{I}) : u(\mathcal{I})), \quad \text{トスレバ}$$

$$x \longleftrightarrow x_u(\mathcal{I}), \quad \mathcal{I} \in \Omega$$

ナリ対応ハ定理 19 カラ $+$, $\wedge$, $\vee$ = 同型 ナルカラ.

$$(x(\mathcal{I}) : u(\mathcal{I})) = (y(\mathcal{I}) : v(\mathcal{I})) \quad \mathcal{I} \in \Omega$$

$\Rightarrow \mathcal{V}(x, u) \cong \mathcal{V}(y, v)$ 及ビ 対応 スルエ カ互ニ比較可能
(x, u, v , 比較可能カラ) が導カレル. 即チ $(x : u) = (y : v)$ トナル (証了)

コレカラ定理 13, 14, 15 が成立ツ.

定理 16 / 証 前半 $\Lambda(x) \in \Omega^*$ トラバ, 定義 12, 15 ヨリ

$$(\Lambda(x) : \Lambda(y)) = (x : y) \text{ 即チ } (\Lambda(x) : x) = (\Lambda(y) : y) \text{ ヲ得ル.}$$

後半. $\Lambda \in \mathcal{V}^* = \text{対立}$, $u \in \mathcal{V}^*$, $\Lambda = (x : u) = \text{対立}$ $x = \Lambda(u)$
トスレバ, $\mathcal{V}^*$, 範囲 ナル (i) が成立ツ. $x \notin \mathcal{V}^*$ トキハ

$$x = y - z, \quad y, z \in \mathcal{V}^* \text{ トスレバ}$$

$$\Lambda(x) = \Lambda(y) - \Lambda(z) \in \mathcal{V}$$

=ヨリ $x \rightarrow \Lambda(x)$ が一義ニ定メラル. コノトキ $x \notin \mathcal{I}$ トラバ
 $\Lambda(x)(\mathcal{I}) + \Lambda(z)(\mathcal{I}) = \Lambda(y)(\mathcal{I})$ ヨリ

$$(\Lambda(x)(\mathcal{I}) : x(\mathcal{I})) = \Lambda(\mathcal{I}) \quad \text{トナリ, } x \in \mathcal{I} \text{ トラバ}$$

$$(\Lambda(z)(\mathcal{I}) : u(\mathcal{I})) = (\Lambda(y)(\mathcal{I}) : u(\mathcal{I})), \quad \text{即チ}$$

$$\Lambda(y) - \Lambda(z) \in \mathcal{I}, \quad \Lambda(x) \in \mathcal{I} \quad \text{トナル. 今}$$

$$\frac{1}{m} < \Lambda < n \text{ トスレバ, } \frac{1}{m} < \Lambda(\mathcal{I}) < n \text{ トナルカラ}$$

$$\frac{1}{m} x(\mathcal{I}) < \Lambda(x)(\mathcal{I}) < n x(\mathcal{I}) \quad (x \notin \mathcal{I})$$

トナル. ソレト上 / $x \in \mathcal{I} \longleftrightarrow \Lambda(x) \in \mathcal{I}$ ト合せて, 定理 19

40.

$$\Rightarrow \exists) \quad \frac{1}{m} x < \Lambda(x) < n x$$

が導かれる。即ち x と $\Lambda(x)$ とは比較可能となる (16)

定理 18 (証明) $\mathcal{V} \neq \mathcal{V}_1$ ならば 定理 18 = 3) 本五大イデアル $\mathcal{J}$ が存在する。即ち $\mathcal{V} \neq \mathcal{V}^*$ である。ヨツテ $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ である。

$$I = B_1 \cup B_2, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset \quad B_1 \neq \emptyset, B_2 \neq \emptyset$$

分解される。 $B_i \ni x_i, \quad y_i = y_i - z_i; \quad y_i, z_i \in \mathcal{O} = \text{トレバ}$

($\mathcal{V}^* \cong \mathcal{V}$)^{*} である故、同文字を用ひて)

$$w = y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad u = y_1 z_1 + y_2 z_2$$

ハ各 $\mathcal{J} \in \mathcal{L} = \mathcal{L}'$ に対して $w(\mathcal{J}) = u(\mathcal{J})$ を満足する。故に 定理 19

に依り $u = w$ となる。今 $\mathcal{V}^*$ が体 = 拡張されたものと

$$(y_1 - z_1)(y_2 - z_2) = w - u = 0$$

となり零因子を生ずる。コレハ矛盾である。 (20, 1, 18)

河田敬義, 祐乘坊瑞満, 伊関義四郎, 角谷静夫, 四氏
ノ論文ハ 既ニ 昭和 20 年 春 受付ケタモノデアリマスガ,
種々ノ事情ノタメ 本号 マデノヒタコトラオワヒ致シマス。

編輯者
発行者

清水辰次郎

大阪帝國大學理學部數 教室