



Title	Rademacherノ定理ノ解析的証明
Author(s)	伊関, 兼四郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(2), p. 43-48
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75146
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

11. Rademacher, 定理, 解析的証明

東大 伊藤兼四郎

(昭和20年5月17日受付)

1. 自然数 n / 無限に分割 / 数 $p(n)$ / 生成函数 / 一次変換 = 関数 τ 1 / $24k$ 乗根 (トハ或ル自然数) ヲ決定スル問題が生ズル。此 / 問題ハ本集 橋田 Modul 函数, 変換, 理論 = 属スルモノデ Hermite 以来何人カ / 数学者 = 依ソテ研

々々

究カレタ。其、後 Hans Rademacher の問題、 $24k$ 乗根ヲ表ス一ツ、新公式ヲ得テ之ヲ算術的・的ニ証明シ、以下筆者ハ Rademacher ノ公式、解析的証明ヲ述ベテ見タイ。其、タメニ先ツ Hermite ノ公式、Rademacher ノ公式、何レトモ異ナル一ツノ公式ヲ導キ、然ル後此ノ公式ガ後者ト同等ナルヲ証明スル

2. $p(n)$ 、生成函数ヲ $f(x)$ トスレバ明ラカニ

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) x^n \quad (|x| < 1)$$

今 $x = \exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi z}{k}\right)$ ト置ケバ $f(x)$ 、変換公式ハ

$$f(x) = \omega_{h,k} \sqrt{z} \exp\left(\frac{\pi}{12kz} - \frac{\pi z}{12k}\right) f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i l}{k} - \frac{2\pi}{kz}\right)\right\}$$

トナル。茲ニ $z = \sqrt{z}$ ハ $\Re(z) > 0$, $\Re(\sqrt{z}) > 0$ ナル任意、複素数、 k ハ任意、自然数、 h ハ $(h, k) = 1$; $1 \leq h \leq k$ ナル任意、自然数、 l ハ合同式 $hl \equiv -1 \pmod{k}$ 、任意、有理整数解、 $\omega_{h,k}$ ハ $1/24k$ 乗根ニ其ノ値ハ h ガ奇数ナル時ハ

$$\omega_{h,k} = \left(\frac{-k}{h}\right) \exp\left(-\left\{\frac{1}{4}(2-hk-h) + \frac{1}{12}\left(k-\frac{1}{k}\right)(2h-l+h^2l)\right\}\pi i\right),$$

k ガ奇数ナルハ

$$\omega_{h,k} = \left(\frac{-h}{k}\right) \exp\left(-\left\{\frac{1}{4}(k-1) + \frac{1}{12}\left(k-\frac{1}{k}\right)(2h-l+h^2l)\right\}\pi i\right)$$

ニ表サレル。茲ニ $\left(\frac{a}{b}\right)$ ハ Legendre-Jacobi ノ記号ナル。勿論 h, k ガ共に奇数ナルハ上ノ二公式ハ等シイ値ヲ与ヘル。又等ニ公式ハ Hermite ガ得タモノナル。

Rademacher ノ公式ハ Hermite ノ公式トハ全く異ナル形ヲ

$$\omega_{h,k} = \exp\left\{\pi i \sum_{n=1}^{k-1} \frac{n}{k} \left(\frac{hn}{k} - \left[\frac{hn}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)\right\} \quad (k \geq 2)$$

ト書カラル。茲ニ $[u]$ ハ実数 u ノ超エナイ最大、有理整数ヲ表ハス。(Gauss ノ記号)。

筆算ハ先ツ

$$\omega_{h,k} = \exp\left(\frac{\pi^2}{4k} \sum_{n=1}^{k-1} \cot \frac{\pi n}{k} \cot \frac{\pi h n}{k}\right) \quad (k \geq 2)$$

ヲ導カリ, 以下 α ハ正数トシ

$$\rho = \exp\left(\frac{2\pi i h}{k}\right) \quad \gamma = \exp\left(-\frac{2\pi i}{k}\right)$$

トオケバ, $x = \rho\gamma$, $0 < \gamma < 1$ トナル. 前述ノ変換公式ノ両辺ノ対数ヲ取レバ (α ハ有理整数トシテ)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} &= \log \omega_{h,k} + \frac{1}{2} \log x + \frac{\pi}{12k} - \frac{\pi x}{12k} \\ &\quad + \log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi i}{kx}\right)\right\} + 2\pi i \alpha. \end{aligned}$$

但シ対数ハ偏角ガ $-\pi < \text{偏角} \leq \pi$ ナ主値ヲ取ル. 此ノ等式ノ両辺ノ虚部ヲ取レバ.

$$\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) = \Im \log \omega_{h,k} + \Im \log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi i}{kx}\right)\right\} + 2\pi \alpha,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) = \Im \log \omega_{h,k} + 2\pi \alpha$$

$$\omega_{h,k} = \exp\left\{\lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \Im\left(\sum \log \frac{1}{1-x^n}\right)\right\}$$

故ニ次ノ式ヲ証明スルバヨイ.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) = \frac{\pi}{4k} \sum_{n=1}^{k-1} \cot \frac{\pi n}{k} \cot \frac{\pi h n}{k}.$$

$$\text{サテ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n},$$

$$\begin{aligned} \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right) \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right) \end{aligned}$$

然レ n = 最後ノ級数ハ後ニ証明スル如ク $0 < \gamma < 1$ = 於テ一様収斂スルカラ

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right) \right) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \Im \lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-x^n}$$

筆算ハ先ツ

$$\omega_{h,k} = \exp\left(\frac{\pi^2}{4k} \sum_{\mu=1}^{k-1} \cot \frac{\pi\mu}{k} \cot \frac{\pi h\mu}{k}\right) \quad (k \geq 2)$$

ヲ導カリ, 以下 α ハ正数トシ

$$\rho = \exp\left(\frac{2\pi i h}{k}\right) \quad \gamma = \exp\left(-\frac{2\pi \alpha}{k}\right)$$

トオケベ, $x = \rho\gamma$, $0 < \gamma < 1$ トナル. 前述, 変換公式, 両辺,
対数ヲ取レバ (α ハ有理整数トシ)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} &= \log \omega_{h,k} + \frac{1}{2} \log x + \frac{\pi}{12k} x - \frac{\pi x}{12k} \\ &\quad + \log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi \alpha}{kx}\right)\right\} + 2\pi i \alpha. \end{aligned}$$

但シ対数ハ 偏角ガ $-\pi < \text{偏角} \leq \pi$ 主値ヲ取ル. 此ノ等式,
両辺ノ虚部ヲ取レバ.

$$\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) = \Im \log \omega_{h,k} + \Im \log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi \alpha}{kx}\right)\right\} + 2\pi \alpha,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) = \Im \log \omega_{h,k} + 2\pi \alpha$$

$$\omega_{h,k} = \exp\left\{\lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \Im\left(\sum \log \frac{1}{1-x^n}\right)\right\}$$

故ニ次ノ式ヲ証明スルバヨイ.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) = \frac{\pi}{4k} \sum_{\mu=1}^{k-1} \cot \frac{\pi\mu}{k} \cot \frac{\pi h\mu}{k}.$$

サテ $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n},$

$$\begin{aligned} \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right) \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right) \end{aligned}$$

然レ n = 最後ノ級数ハ後ニ証明スル如ク $0 < \gamma < 1$ 於テ一様
収斂スルカラ

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right)\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \Im \lim_{\gamma \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-x^n}$$

46

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \zeta\left(\frac{1}{1-\rho^n}\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{2n} \cot n\theta \quad \left(\theta = \frac{\pi h}{R}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{R-1} \frac{1}{2} \cot m\theta \sum_{s=0}^n \frac{1}{m+ks}
 \end{aligned}$$

サテ自然数 $n = \infty$ 対して

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=0}^n \frac{1}{m+ks} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \sum_{s=1}^n \frac{1}{s + \frac{m}{k}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \sum_{s=1}^n \left(\frac{1}{s + \frac{m}{k}} - \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{k} \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} \\
 &= \frac{1}{k} \left\{ \log n - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right) + o(1) \right\} \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$\text{故} = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{2} \cot m\theta \sum_{s=0}^n \frac{1}{m+ks} = \frac{1}{2k} \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ -\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right) \right\} \cot m\theta$$

$$+ \frac{\log n}{2k} \sum_{m=1}^{k-1} \cot m\theta + o(1) \rightarrow \frac{1}{2k} \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ -\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right) \right\} \cot m\theta \quad (n \rightarrow \infty)$$

何トナレバ明ラカ = $\sum_{m=1}^{k-1} \cot m\theta = 0$ ナカラテアル。然ルニ

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2k} \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ -\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right) \right\} \cot m\theta &= \frac{1}{4k} \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1 - \frac{m}{k}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right) \right\} \cot m\theta \\
 &= \frac{\pi}{4k} \sum_{m=1}^{k-1} \cot \frac{\pi m}{k} \cot \frac{\pi h m}{k}, \quad Q. E. D.
 \end{aligned}$$

3. 前述、一般収斂性ヲ証明スル。其ノタメニ $0 < \gamma < 1$ ニ於テ $\sum_{s=0}^{\infty} A_s$ ナ一般収斂ナルヲ示セバヨシ、但シ

$$A_s = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m+ks} \zeta\left(\frac{1}{1-\rho^m \gamma^{m+ks}}\right)$$

サテ s ナ自然数トスルバ $0 < \gamma < e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$ ナルナキ

$$|A_s| \leq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{ks} \frac{\gamma^{ks}}{|1-\rho^m \gamma^{m+ks}|^2} \leq \frac{K}{s} e^{-k\sqrt{s}}$$

茲ニ $K = K(h) > 0$ ナ h, m, s, γ = 無関係ニ h, m, s, γ $(0 < \gamma < 1)$ ノ如何ナル諸サレタル組合セニ對シテモ

$$|1 - \rho^m \gamma^{m+ks}|^2 \geq \frac{1}{K}$$

ナルモノトスル。カ、ル K ナ存在スルヲハ明ラカナル。更ニ、 $e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}} \leq \gamma < 1$

ナルナキハ

$$\begin{aligned}
 &|A_s - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{ks} \zeta\left(\frac{1}{1-\rho^m \gamma^{m+ks}}\right)| \\
 &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{ks(m+ks)} \zeta\left(\frac{1}{1-\rho^m \gamma^{m+ks}}\right) \right| \leq \frac{K}{s^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{故} = \frac{K}{s^2} + \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{ks} \Im \left(\frac{1}{1 - \rho^m \gamma^{m+ks}} \right) \right| \\
& \leq \frac{K}{s^2} + \left| \frac{1}{ks} \sum_{m=1}^R \Im \left(\frac{1}{1 - \rho^m \gamma^{ks}} \right) \right| \\
& = \frac{K}{s^2} + \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{ks} \Im \left(\frac{1}{1 - \rho^m \gamma^{m+ks}} - \frac{1}{1 - \rho^m \gamma^{ks}} \right) \right| \\
& = \frac{K}{s^2} + \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{ks} \Im \left\{ \frac{\rho^m \gamma^{ks} (\gamma^m - 1)}{(1 - \rho^m \gamma^{m+ks})(1 - \rho^m \gamma^{ks})} \right\} \right| \\
& \leq \frac{K}{s^2} + \frac{K}{s} (1 - \gamma^k) \leq \frac{K}{s^2} + \frac{K}{s} (1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{s}}}) \leq \frac{K}{s^2} + \frac{kK}{s\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

斯 7 正自然数 s 及正数 $r < 1$ 之对证

$$|A_s| \leq \frac{K}{s} e^{-k\sqrt{s}} + \frac{K}{s^2} + \frac{kK}{s\sqrt{s}},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} |A_s| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{K}{s} e^{-k\sqrt{s}} + \frac{K}{s^2} + \frac{kK}{s\sqrt{s}} \right) < \infty \quad \text{Q. E. D.}$$

4. 最後 = Rademacher, 公式ヲ証明スル

$$\begin{aligned}
& \pi \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k} \left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k} \right] - \frac{1}{2} \right) = -\pi \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\mu\theta}{n\pi} \\
& = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{kn} \sum_{\mu=1}^{k-1} \mu \sin 2n\mu\theta \quad \left(\theta = \frac{\pi h}{k} \right) \\
& = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{kn} \frac{k \sin \{2(k-1)n\theta\}}{(2 \sin n\theta)^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{2n} \cot n\theta \\
& = \frac{\pi}{4k} \sum_{m=1}^{k-1} \cot \frac{\pi m}{k} \cot \frac{\pi h m}{k} \\
& \exp \left\{ \pi i \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k} \left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k} \right] - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
& = \exp \left(\frac{\pi i}{4k} \sum_{m=1}^{k-1} \cot \frac{\pi m}{k} \cot \frac{\pi h m}{k} \right)
\end{aligned}$$

参照文献

G. H. Hardy and Ramanujan, "Asymptotic formulae

in combinatory analysis", 'Proc. London Math. Soc. (2), 17 (1918), pp. 75-115.

Hans Rademacher, "Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunctionen", Journal London Math. Soc., 7 (1932), pp. 14-19, also "On the partition function $p(n)$ ", Proc. London Math. Soc. (2), 43 (1937), pp. 241-254