OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Complex-Banach space二於ケル解析函数ニツイテ（Ⅰ）
Author(s)	霜田, 伊佐衛
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(2), p. 50-56
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75148
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

13. Complex-Banach space ニ於ケル解析函数ニツイテ(I)

阪大　霜田伊左衛

(1946, XI, 19)

A. E. Taylor 氏ハ Osgood ノ定理ヲ拡張シテ，変域ヲ複素平面ガトComplex-Banach space E' ノ product space ニトリ値域ヲ complete Banach space E'' ニ取ッテ居リマス[1] 此ノ note ノ目的ハ複素平面ヲヲ complex-Banach space E ニ拡張スルコトデアリマス。

必要ノタメニ A. E. Taylor 氏ノ定理A, 定理B' ヲモシマス.

定理A E, E' ヲ complex Banach space トスルトキ $\{f_n(x)\}$ ハ E ノ domain D デ定義セラレ, E' ノ値ヲトル regular ナ函数ノ sequence トスル. 若シ

i) D ノ各点デ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

ii) D ニ含マレル任意ノ領域デ有界

ナルトキ $f(x)$ ハ D デ regular トナル.

定理B $f(x, y)$ ハ $E \times E'$ ノ domain D デ定義セラレ E'' ノ値ヲトル.

i) D ニ於テ x ヲ fix スレバ y ニツキ正則

y ヲ fix スレバ x ニツキ正則

ii) (x, y) ニツイテ連続

ナルトキ $f(x, y)$ ハ D デ正則トナル.

定理1 $\{f_n(x)\}$ ハ E ノ domain D デ定義セラレ E' ノ値ヲトル正則函数ヲ sequence トスル. 若シ

i) D ノ各点デ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

ii) D ニ含マレル任意ノ compact set G ニ於テ $M_G (>0)$ ガ存在シテ $\|f_n(x)\| \leq M_G$,

ナルトキ $f(x)$ ハ D デ正則トナル.

(証明) D ノ内ノ任意ノ点ヲ x_0 トスル. モシ D ノ内デ $\|x - x_0\| \leq \rho$ ナルトキ $\|f_m(x)\| \leq M$ ナル様ナ一対ノ正数ガ存在シナカッタトスレバ $x_{n_1} \to x_0$, $\|f_{m_n}(x)\| > n$, $\{f_{m_n}(x)\} < \{f_n(x)\}$ $x_n \in D$, ナル様ナ点列 $\{x_n\}$ ガ存在スル. $\{x_n\}$ ハ compact set ナル故 ii) ニヨリ $f_n(x)$ ハ $\{x_n\}$ デ有界デナケレバナラヌ. 之ハ不合理ナル故必ズ一対ノ正数 ρ, M ガ存在シ $\|x - x_0\| < \rho$ ナルトキ $\|f_n(x)\| \leq M$ トナル. 又 $x_0 \in D$ ナル故 $\|x - x_0\| < \rho$ D ニ含マレル様ニ出来ル. コヽデ $\|x - x_0\| < \rho$ ニ定理Aヲ適用スレバ $f(x)$ ハ $\|x - x_0\| < \rho$ デ正則トナル. x_0 ハ任意ナル故 $f(x)$ ハ D デ正則トナル.

[註1] 定理1が成立スレバ容易ニ定理Aノ成立スルコトガ分リマスカラ，定理Aト定理1ハ同等デアリマス。

定理2 $E \times E'$, domain D デ定義セラレ，E'', 値ヲトル函数 $f(x, y)$ ガ

i) D ニ於テ x ヲ fix スレバ y ニツキ正則，
y ヲ fix スレバ x ニツキ正則

ii) D ニ含マレル任意，compact set G デ
$\|f(x,y)\| \leqq M_G$ ナルトキ $f(x,y)$ ハ D デ正則トナル。

(証明) D ニ含マレル任意ノ点ヲ (x_0, y_0) トスル時，R, S (>0) ヲ適当ニトレバ $\|x-x_0\| < R$, $\|y-y_0\| < S$ ハ D ニ含マレ，従ッテ此所デ $f(x,y)$ ガ正則ナル事ガ分レバ，(x_0, y_0) ハ任意デアルカラ $f(x,y)$ ハ D デ正則トナル。依ッテ一般性ヲ失フコトナク，$(x_0, y_0) = (0, 0)$ トシ，$f(x,y)$ ハ (T, T') (但シ $T: \|x\| < R$, $T': \|y\| < S$ ヲ表ス) デ各変数ニツキ正則デ，(T, T') 内ノ任意ノ compact set G デ $\|f(x,y)\| \leqq M_G$ トスルナラ $f(x,y)$ ハ $(T; T')$ デ正則ナルコトヲ証スレバヨイ。

$f(x,y)$ ハ x ヲ fix スレバ y ニ付キ正則ナル故次ノ如ク展開サレル

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,y)$$

ココニ $U_n(x,y)$ ハ y ニツキ n 次ノ斉次多項式トナル (斉次多項式ノ定義ハオ一号，17頁ヲ参照下サイ)

今エルニ今 y ヲ fix スレバ $\rho < \frac{S}{\|y\|}$ ナル ρ ヲトリ，円 C ヲ $|\alpha| = \rho$ デ表ハセバ

$$U_n(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x, \alpha y)}{\alpha^{n+1}} d\alpha \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

円 C ヲ m ケノ点 $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots \eta_m$ ($\eta_{m+1} = \eta_1$ トオク) ヲトリ弧 $\eta_i\ \eta_{i+1}$ 上ニ任意ノ点 ζ_i ($i = 1, 2, \cdots m$) ヲトリ

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{f(x, \zeta_i y)}{\zeta_i^{n+1}} (\eta_{i+1} - \eta_i) \right)$$

トオク，但シ $m \to \infty$ ナルトキ C ニ於テ $\max_{i \le m} |\xi_{i+1} - \xi_i| \to 0$ ナル様ニシテオク．然ルトキハ

i) $S_m(x)$ ハ T デ正則デアル，

ii) オヨソ任意ノ点ノ列ニ対シテ

$$\lim_{m \to \infty} S_m(x) = U_n(x, y)$$

iii) T ニ含マレル任意ノ compact set ヲ G_0 トスルトキ y ハ compact set ナル限リ $G = (G_0, y)$ ハ D デ compact set トナル

故ニ M_G ガ存在シテ

$$\|f(x, \alpha y)\| \le M_G \quad (x \in G_0 \quad \alpha \in C)$$

$$\|S_m(x)\| \le \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{\|f(x, \eta_i y)\|}{|\eta_i|^{n+1}} |\xi_{i+1} - \xi_i| \le \frac{M_G}{\rho^n}$$

依ッテ定理1ニヨリ $U_n(x, y)$ ハ x ニソキ正則トナル．$U_1(x, y)$ ハ x ヲ fix スレバ y ニツキ linear トナルカラ Kerner ノ定理2)ニヨリ (x, y) ニツキ (T, E') デ直積トナル．故ニ定理Bニヨリ (T, E') デ正則トナル．猶一般ニ

$$U_n(x, y) = \frac{1}{n!} \left[\delta^n f(x; y_1, y_2, \cdots, y_n) \right]_{y_1 = y_2 \cdots = y_n = y}$$

$\delta^n f(x; y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ハ x ヲ fix シタトキ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ニ付キ夫々 linear トナル．$y_1, y_2, \cdots, y_n$ ヲ fix スレバ $|\alpha_i| \le \rho$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ ナルトキ $\|\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n\| < S$ ナル様ニ ρ ヲ選ベバ，

$$\delta^n f(x; y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \frac{d\alpha}{\alpha_1^2} \int_C \frac{d\alpha_2}{\alpha_2^2} \cdots \int_C \frac{f(x, \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)}{\alpha_n^2} d\alpha_n$$

$(C : |\alpha_i| = \rho$ ナル円ヲ表ハス$)$

$G = \underset{x \in G_0}{E} (x; \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)$ トオケバ G ハ compact set トナル．

故ニ M_G ガ存在シテ $\|f(x, y)\| \le M_G$ $((x, y) \in G)$ トナル

今 $f(x\cdot\alpha_1 y_1+\cdots+\alpha_n y_n)$ ニ於テ特ニ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ ヲ fix スレバ $U_1(x,y)$ ト同様ニシテ

$$\int_C \frac{f(x,\alpha_1 y_1+\cdots+\alpha_{n-1}y_{n-1}+\alpha_n y_n)}{\alpha_n^2}\,d\alpha_n$$ ハ x ニツキ

正則トナル 且ツ G デハ有界トナル.

次ニ α_{n-1} ニツイテ考ヘレバ

$$\int_C \frac{d\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}^2}\int_C \frac{f(x,\alpha_1 y_1+\cdots+\alpha_n y_n)}{\alpha_n^2}\,d\alpha_n$$ ハ x ニツキ

regular トナル. 以下三ヲ援用セバ $\delta^n f(x;y_1,y_2\cdots,y_n)$ ハ $y_1,y_2,\cdots y$ ヲ fix シタ時 x ニツキ. regular トナル 今 $y_2,\cdots,y_n$ ヲ fix スレバ $\delta^n f(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)$ ハ x ニツキ regular デ y_1 ニツキ連続ナル故 Kerner ノ定理ヨリ (x,y_1) ニツキ連続トナル.

次ニ $y_2,\cdots y_n$ ヲ fix スレハ (x,y_1) ニツキ連続デ y_2 ニツキ linear ナル故 Kerner ノ定理ヨリ (x,y_1,y_2) ニツキ連続トナル. ヨヲ援用セバ $\delta^n f(x,y_1,\cdots y_n)$ ハ $(x,y_1,\cdots y_n)$ ニツキ連続トナル. $y_1=\cdots=y_n=y$ トオケバ $\delta^n f(x;y,\cdots,y)$ 乃チ $U_n(x,y)$ ハ (x,y) ニツキ (T,E') ヲ連続トナル 依ツテ定理 B ヨリ $U_n(x,y)$ ハ (T,E') ヲ正則トナル

茲ニ (T,T') ニ含マレル任意ノ compact set ヲ G トスル. G ノ $T;T'$ ヘノ projekt ヲ夫々 G_0,G_1 トスレバ G_0,G_1 ハ夫々 T T' ニ於ケル compact set トナリ, $\max_{y\in G_1}\|y\|=\rho<S$ トナル.

C ヲ $|\alpha|=\rho$ $\left(1<\rho<\frac{S}{\rho}\right)$ ナル円トスレバ $C\times G_1$ ハ又 T' ノ compact set トナル. 故ニ $G=(G_0,C\times G_0)$ トオケバ G' ハ (T,T') デ compact set トナル 依ツテキハ $M_{G'}$ ガ存在シテ

$$\|f(x,y)\|\leqq M_{G'}\qquad (x,y)\in G'$$

一方 $G\subset(G_0,G_1)$ ナル故 $(x,y)\in G$ ナルトキ

$$U_n(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x,\alpha y)}{\alpha^{n+1}}\,d\alpha \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

$$\|U_n(x,y)\| \leqq \frac{MG}{\rho^n}$$

故に $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,y)$ は G で絶対収斂する。
G は任意なれば $f(x,y)$ は (T,T') で正則となる。

系 $f(x,y)$ は $E\times E'$ の領域 D で定義せられた E' の値をとる函数で

i) D で x を fix すれば y につき正則，
y を fix すれば x につき正則

ii) $(x,y)\in D$ なるとき常に $\|f(x,y)\|\leqq M$

なるとき $f(x,y)$ は D で正則となる。

[註2] 定理1の証明に定理Aを用いましたが，之は次の Lemma を用ひ直接証明出来ます。

Lemma. $\{U_n(x)\}$ は E で定義せられた E' の値をとる

p 次の homogeneous polynomial となるとき

E のある点 x_0 の近傍で $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$ が存在すれば $U_n(x)$ は E で p 次の homogeneous polynomial $U(x)$ に収斂する。

(A, E, Taylor 氏は定理Aを用ひ，"$U_n(x)$ が E で収斂するとき $U(x)$ に収斂する" 事を証明して居りますが，Lemma は唯一点の近傍だけで収斂すれば良いのですから 条件はユルクなって居り，且直接容易に証明出来ます。) 一般性を失はず $T(\|x\|<\rho)$ で $f(x)$ が正則なる事を証明する。

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} U_{np}(x),\quad U_{np}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\alpha x)}{\alpha^{p+1}}\,d\alpha$$

$$\left(C:\ |\alpha| = \rho,\ 1<\rho<\frac{\rho}{\|x\|}\right)$$

$\{U_{np}(x)\}$ は p 次の斉次多項式である。x を fix すれば $\alpha x\ (\alpha\in C)$ は compact set となるから故に或る M が在り，$\|f_n(\alpha x)\|\leqq M \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$

$$\therefore\quad \|f_n(\alpha x) - f_m(\alpha x)\| \leqq 2M$$

$$\|U_{np}(x)-U_{mp}(x)\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f_n(\alpha x)-f_m(\alpha x)\|\,d\theta$$

故ニ Lebesgue ノ定理ニヨリ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \|U_{np}(x)-U_{mp}(x)\| \leqq 0$

E' ハ complete ナル故 $\lim_{n\to\infty} U_{np_0}(x) = U_p(x)$ トオケバ $U_p(x)$ ハ Lemma ニヨリ p ンズ ノ homogeneous polynomial ナル。又 T 内ノ任意ノ compact set G ニ於テ $\|f_n(x)\| \leqq M_G$ ナル故ニ $1<\rho$ ガ存在シ,

$$\|U_{np}(x)\| \leqq \frac{M_G}{\rho^p} \qquad \|U_p(x)\| \leqq \frac{M_G}{\rho^p}$$ トナル。

依ツテ, $f(x)=\sum_{p=0}^{\infty} U_p(x)$ トナリ G デ一様収斂スル。乃チ $f(x)$ ハ T デ正則デアル。

——以上——

---

1) P. E. Taylor : On the properties of analytic functions in abstract spaces Math. Ann. 115, (1938)

2) M. Kerner : Zur Theorie der impliziten Funktional – operation. Studia Math. T. III (1931) コノ論ヒデ "$f(x,y)$ ガ各ツヰ連続デ各ツテ linear ナルトキ $f(x,y)$ ハ (x,y) ニ於ツヰ連続トナル" 事ヲ証明シテアリマス。