



Title	Stable distributionヲモツMarkoff Processニ関スル一定理ニツイテ
Author(s)	安西, 広忠
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(2), p. 56-62
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75149
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

14. *Stable distribution* ヲ持ッ

Markoff process ニ関スル一定理ニツイテ

阪大 安西 広忠

(1946. II. 28 付)

角谷サンが *Princeton* へ居ラレタ頃、吉田サンへ
ノミ紙ノ中ニ次ノコトガ述べラレタナル。

Measure space $(\Omega, \mathcal{L}, m)$, L^2 space $L^2(\Omega)$

S is a measure preserving transformation
 S is a unitary operator U_S on $L^2(\Omega)$

$$(f(x) \in L^2 \rightarrow g = U_S(f) \quad g(x) = f(Sx) \quad x \in \Omega)$$

all such U_S are measure preserving transformations 全体
 is a group $\mathcal{U}_g$ of unitary transformations.

group of correspondences $\mathcal{U}_g$ on $L^2(\Omega)$, $\mathcal{U}_g$ is a
 bounded linear operators, is a ring $\mathcal{R}$, (operator space)

strong topology = 関数 f 関数 g 関数 h
 weak topology = 関数 f 関数 g 関数 h

all U_g $\mathcal{R}$ is a weak limit 全体に,
 stable distribution $m(E)$ is Markoff process
 $\mu(x, E) \left(\int_{\Omega} \mu(x, E) m(dx) = m(E) \right)$ is a
 bounded linear operator $T(f) \rightarrow g$
 $g(x) = \int \mu(x, dy) f(y) \quad x, y \in \Omega$ 全体に一致する

この証明を書かせる載り、

この前 $(\Omega, \mathcal{L}, m)$ is atomic elements 可分空間
 separable である、 $m(\Omega) = 1$ である条件が満たされる

この注意する separability である $\mathcal{L} =$ 可算

countable set sequence $A_1, A_2, \dots, A_n$ がある

して、任意に $B \in \mathcal{L}$ と $\varepsilon > 0$ である A_n が存在して

$m(B \ominus A_n) < \varepsilon$ となることを示す

$$\S 1 \quad f \rightarrow T(f) = \int \mu(x, dy) f(y) \quad \text{である} \quad \text{である}$$

$$\int \mu(x, E) m(dx) = m(E)$$

operator T is $\mathcal{U}_g$, weak limit であることを証明
 する

T is a bounded operator である

$$\int \left| \int \mu(x, dy) f(y) \right|^2 m(dx) \leq \int \left| f(y) \right|^2 \int \mu(x, dy) m(dx)$$

$$= \int |f(y)|^2 \int \mu(x, dy) m(dx) = \int |f(y)|^2 m(dy)$$

$$\|T\| \leq 1$$

任意に $\varepsilon > 0$, $f_1, f_2, \dots, f_n$ $g_1, g_2, \dots, g_n$
 $\in L^2(\Omega)$, $\mu = 1, 2, \dots$ である

$$|(Tf_i, g_i) - (U_S f_i, g_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

μ is satisfied

$\rho \in \mathcal{G}$ が存在スルコトを $A \in \mathcal{G}$ とい

T は $\mathcal{U}g = \text{full operator}$, norm カ 1 を越ス
 $\mathcal{I} = \{ \rho \in \mathcal{G} \mid \rho_i \quad i = 1, 2, \dots, \mu, \text{ characteristic functions, linear combination } \rho \text{ が } \mathcal{G} \text{ に属スル } \}$
 $\mathcal{I} = \{ \rho \in \mathcal{G} \mid \rho \text{ は } \mathcal{G} \text{ に属スル } \}$, $\mathcal{I} \neq \emptyset$, $\mathcal{I} = \mathcal{G}$ なら $\mathcal{I} = \mathcal{G}$
 $\text{disjoint} \rightarrow \text{ disjoint}$, $\mathcal{I} \neq \emptyset$ なら $\mathcal{I} = \mathcal{G}$

$$\mathcal{I} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\mathcal{I} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$(T\varphi_{A_i}, \varphi_{B_j}) = (\bigcup_{i=1}^m \varphi_{A_i}, \varphi_{B_j}) \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$\mathcal{I} \neq \emptyset$ なら $\mathcal{I} \in \mathcal{G}$ が存在スルコトが $\mathcal{I}$ の性質である

$\mathcal{I} = \mathcal{G}$ なら $\mathcal{I} \in \mathcal{G}$ が存在スルコトが $\mathcal{I}$ の性質である

$$\alpha_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{B_i} \rho(x, A_j) m(dx)$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = \int_{B_i} \sum_{i=1}^m \rho(x, A_j) m(dx) = m(B_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = \int_{\mathcal{I}} \rho(x, A_j) m(dx) = m(A_j)$$

$\mathcal{I} = \mathcal{G}$ なら $\mathcal{I} \in \mathcal{G}$ が存在スルコトが $\mathcal{I}$ の性質である

$$B_i = A_{i1}^* \cup A_{i2}^* \cup \dots \cup A_{im}^* \quad A_{ip}^* \cap A_{iq}^* = \emptyset$$

$$m(A_{ip}^*) = \alpha_{ip} \quad p = 1, 2, \dots, m \quad (p \neq q)$$

$$A_j^* = A_{1j}^* \cup A_{2j}^* \cup \dots \cup A_{mj}^* \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathcal{I} = \text{disjoint} \quad \mathcal{I} = A_1^* \cup A_2^* \cup \dots \cup A_m^*$$

$$m(A_j^*) = \sum_{i=1}^n m(A_{ij}^*) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = m(A_j) \quad \mathcal{I} \neq \emptyset$$

$$A_i^* = S(A_i) \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \mathcal{I} \neq \emptyset \quad S \in \mathcal{G} \text{ が存在スル}$$

$$(T\varphi_{A_i}, \varphi_{B_j}) = (\bigcup_{i=1}^m \varphi_{A_i}, \varphi_{B_j})$$

$$= \int \left\{ \int \rho(x, dy) \varphi_{A_j}(y) \right\} \varphi_{B_i}(x) m(dx) \\ = \int \varphi_{SA_j}(x) \varphi_{B_i}(x) m(dx)$$

$$= \int_{B_i} \rho(x, A_j) m(dx) = m(SA_j \cap B_i)$$

$$= \alpha_{ij} - m(A_{ij}^*) = 0$$

$$= 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

§2. T は $\mathcal{U}g$, weak limit ρ である。 T は stable

distribution ρ 及び ρ の Markov operator T は ρ の stable

$(\varphi = \{A \in \mathcal{L} \mid \dots\})$ 置 $A \in \mathcal{L}$ 7 与 $\sim \varphi$
 $B \in \mathcal{L}$ 1 $\varepsilon > 0 = \exists \varphi$ $S' \in \mathcal{G}$ 7 存在
 $\varphi \in \mathcal{F}, |(T\varphi_A, \varphi_B) - (U_S \varphi_A, \varphi_B)|$
 $= |(T\varphi_A, \varphi_B) - m(S'(A) \cap B)| < \varepsilon \dots \dots \dots (11) \quad \varphi$

満足スルカラ, 直 = $\mathbb{R}$ 1 コトカ合ル

$$(2) \quad 1 \geq f_A(x) \geq 0, \quad \text{for almost all } x$$

$$(3) \quad f_B(x) = 1 \quad \text{for almost all } x$$

T : linearity カ

$$(4) \quad A \cap B = \emptyset \rightarrow f_A(x) + f_B(x) = f_{A \cup B}(x) \quad \text{for almost all } x$$

T 7 bounded linear operator 7 アルカラ

$$(5) \quad A_m \in \mathcal{L} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$A_m \cap A_n = \emptyset \quad (m \neq n) \quad \& \quad A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

$$\rightarrow f_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}(x) \quad \text{for almost all } x$$

(ii) $(\Omega, \mathcal{L}, m)$, separability カ, countable set sequence $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{L}$ 7 存在シテ此等, 集合ヲ含ム最小, Borel field 7 $\mathcal{L}'$ トスルコト任意, $B \in \mathcal{L} = \exists \sim \varphi$ 7 $B' \in \mathcal{L}'$ 7 見付ケテ $m(B \ominus B') = 0$ ト出来るコトカ合ル $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 7 含ム最小, set field 7 $\mathcal{L}$ トスル.

(iii) = 於テ次, 事ヲ証明スル Γ null set N 7 存在シテ, $x \in N$ 7 $x \notin N$ 7 $\mathcal{L}'$ 7 集合 = $\exists \sim \varphi$ 7 定義セラル φ countably additive measure

$\mu(x, A)$ 7 family 7 存在シテ 任意, $A \in \mathcal{L}' = \exists \sim \varphi$,
 $(6) \quad f_A(x) = \mu(x, A) \quad \text{for almost all } x$
 カ成立スル

任意, $f(x) \in L^2(\Omega) = \exists \sim \varphi$ $m\{x \mid f(x) \neq f^*(x)\} = 0$
 7 満足スル $\mathcal{L}''$ -measurable 7 函数 $f^*(x)$ 7 見付ケル
 コトカ出スル

$R(f) = \int \mu(x, d\varphi) f^*(\varphi) = \exists \sim \varphi$ bounded linear operator R 7 unique = $\exists \sim \varphi$

任意, $A \in \mathcal{L}' = \exists \sim \varphi$, $m(A \ominus A') = 0$, $A' \in \mathcal{L}'$

$$(8.2) \quad A \in \mathcal{A} \quad \rightarrow \quad f_A(x) \geq 0$$

$$(8.3) \quad f_{\Omega}(x) = 1$$

$$(8.4) \quad A, B \in \mathcal{A} \quad A \subseteq B \rightarrow f_A(x) \leq f_B(x)$$

が成立スルヤウ = 出来ル。

即チ $N_0 \ni x = \text{対シテ}$ $f_{E_r}(x) = \psi(x, r)$ ト置ケバ

$$(9.1) \quad \psi(x, r) \leq \psi(x, s)$$

$$\psi \quad r \leq s, \quad r, s \in \Delta$$

$$(9.2) \quad \psi(x, r) \geq 0$$

$$(9.3) \quad \psi(x, 1) = 1$$

$$(9.4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \psi(x, r) = 0 \quad (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ が}$$

atomic element を持たないカラ

$x \notin N_0$ ト 0 ト 1 の間、実数 $\alpha = \text{対シテ}$ $\bar{\psi}(x, \alpha)$ を

$$\bar{\psi}(x, \alpha) = \lim_{\substack{r \rightarrow \alpha \\ r \geq \alpha}} \psi(x, r) \text{ デ定義スル}$$

$$r \in \Delta = \text{対シテハ}, \quad \bar{\psi}(x, r) = \psi(x, r)$$

$\bar{\psi}(x, \alpha)$ ハ $\alpha \notin \Delta = \text{於テハ}$, 上カラ連続ナルコトハ

定義カラ明デアルガ, $\alpha \in \Delta = \text{於テハ}$, (5)ヨリ $r \downarrow \alpha$

ナルトキ, $f_{E_\alpha}(x) = \lim_{\substack{r \rightarrow \alpha \in E_r \\ r > \alpha}} f(x)$ カ殆ニドヌベテ, x

= 対シテ成立スル

コトが命ル

Δ ハ countable デアルカラ null set $N \supseteq N_0$ が

存在シテ, $x \notin N = \text{対シテハ}$, $\bar{\psi}(x, \alpha)$ ハ $\alpha = \text{関シ}$

テ, 上カラ連続ナル函数 = ナリ, 従ツテ (9)ノ諸条件ト

符合ハセルト, $\bar{\psi}(x, \alpha)$ ハ, $x \notin N = \text{対シテハ}$

$0 \leq \alpha \leq 1$, distribution function デアル

従ツテ, $N \ni x = \text{対シテ}$, $f_A(x) = \mu(x, A)$ ト

置ケバ (8)ノ諸条件ヨリ $\mu(x, A)$ ハ $\mathcal{A}$ ノ集合 = 対シ

テ定義セラレタ finitely additive measure = ナリ

テアルコトが命ルガ, $\bar{\psi}(x, \alpha)$ が distribution

function = ナリテアルコト = 恒意マレハ $x \notin N =$

対シテハ, $\mu(x, A)$ ハ $\mathcal{A}$ 内デ countably additive

measure ナリ, ヨツテ $\mathcal{L}'$ ノ集合 = 対シテ定義セラ

ル countably additive measure = 区間上で出来ル。

ソ、measure $\mu(x, B')$, $B' \in \mathcal{L}$ を考へル。

$f(x, B') = \mu(x, B')$ for almost all x が成
スル x の $B' \in \mathcal{L}'$, 全体、算リ考へルト, ソノ
集合族ハ $\mathcal{L}$ を含ミ, 且ツ normal class を作ル
カラ, ソレハ $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ 一致シテバチヤイ 故ニ
恒ニ, $B' \in \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ 成シ

$$(b) \quad f(x, B') = \mu(x, B')$$

for almost all x が成スル