



Title	アルcontinuumノツクル空間
Author(s)	井関, 清志
Citation	全国紙上数学談話会. 1946, 2(2), p. 63-69
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75151
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

16

~~12~~

T の continuum, T の空間

井筒清志 (阪大)

(1946. Ⅳ 9 交付)

continuum = 同スル問題 + indecomposable continuum
 1 つの hyperspace = 一三ノ結果ヲ生シタノデ,
 ソレヲ中心ニシテ述ベテミヨウ。

§1. hyperspace

n -dim. Euclid space = アル固定シタ bounded continuum (closed connected set) ヲ C トスル。 C 1 スベテ, subcontinuum (空集合ヲ除ク) ヲ element トスル space E = 次, metric ヲ導入スル。即チ E 内
 = 点 A, B ノ距離 $p^*(A, B)$ ヲ

$$p^*(A, B) = \text{Max} \left(\sup_{x \in A} p(x, B), \sup_{y \in B} p(A, y) \right)$$

コノ p ハ元ノ空間ノ metric トスル。コノ p^* = 用シテ
 E ハ metric space ヲ作ル。コノ E ヲ C ノ hyperspace
 トイフ。

定理 1.1. E ハ p^* = 用シテ complete metric space =
 ナル。又 p^* = 用シテ E ハ bicompact + arc-wise
 connected 1 continuum ヲ作ル。

(証明) C 1 スベテ, closed subset 1 作ル space 1
 p^* = 用シテ complete metric space ヲツクル。¹⁾ 次 =
 E 1 Cauchy sequence, $\{A_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) ヲトレバ,
 p^* = 用シテ A_n ハ空デタイ一ツノ closed set = 収斂ス
 ル。²⁾ コレヲ A トスレバ, A_n ハ A = 集合系列収斂シテ
 ナルカラ, A_n カスベテ continuum デアルカラ, A カ
 示. continuum = ナル。³⁾ 即チ E ハ complete space =
 ナル。ソノ他ノ諸性質ハ S. Magurkiewicz ト K. Borusik⁴⁾
 ノ論文ノ中ニ含まレテアルカラ異サウ。

定理 1.2 E 内ノ closed set $\mathcal{A}$ = 列シテ $\mathcal{A}_\alpha$ 1 スベテ,
 $A \in \mathcal{A}$ 1 continuum トシテ

$$H = \sum_{A \in \mathcal{A}} A$$

1) H. Hahn; *Reell Funktionen* (1932) p.124

2) H. Hahn; *loc cit.*

3) K. Menger; *Kurventheorie* (1932) p.50

4) S. Magurkiewicz et K. Borusik; *C.R. de l'Acad. Varsovie* 24 (1932) p.149

トカケバ, $H \cap C$, closed subset = ナル. (コノ $H \neq \emptyset$
 $\cap C \neq \emptyset$ projection トイフ.) 又 C が continuum ナラバ
 $H \cap C$, subcontinuum = ナル.

(証明) H が closed set = ナルコト, $\varepsilon > 0$ H が closed
 set ナラケレバ,

$$H \ni p \quad \overline{H} \ni p$$

ナル p がアル. p を中心トスル半径 $\frac{1}{n}$ sphere
 $U_n(p)$ ナレバ $U_n(p) \cap H \neq \emptyset$ カラ $U_n(p) \cap H \ni p_n$ ナレバ
 p_n ナ含ム C ノ点ガアル. 即チコレヲ A_n トスレバ,
 C , biconpactness = ヨリ, A_n , subsequence $A_{n_i} (i=1, 2, \dots)$
 C ノ subcontinuum A = 収斂スルモノカナル.

$p_{n_i} (i=1, 2, \dots)$ ノ点 p = 収斂スルカラ, $A \ni p$ ナラケレバ
 ナラヌ. 故ニ $A \in C$ ヨリ $p \in H$ トナリ, = レハ不合理.

C が continuum ノトキ H が continuum ナラケレバ
 $H \cap C$ = ツノ点ナラケレバ disjoint + closed set = separate
 スル. コレヲ A, B トスレバ $p(A, B) > 0$ ナラゲル. C
 属スル. C ノスベテ, 点ヲ C_A 然ラサル C ノ点ヲ
 C_B トスレバ $C = C_A + C_B$ トフカシテ $p^*(C_A, C_B) > 0$
 トナル. 即チ C ノ連結性 = 反スル.

定理 1.3 C ノ任意ノ connected subset A , 各点 = 対応
 スル ε ノ各点ノ作る ε ノ subset ノ closure ハ ε ノ sub-
 continuum ナ作る. コノ定理ハ今必要ナイカラ証明ヲ
 略シテカカウ.

§2. perfectly indecomposable continuum

continuum C カ C , proper subcontinuum, = ツノ
 点ヲ集ムハナレナイトキ, C が indecomposable continuum
 トイレ. C ノスベテ, subcontinuum カ indecomposable
 トキ C が perfectly indecomposable トイフ.⁵⁾

定理 2.1 C が perfectly indecomposable continuum ナル
 ナラバ, 必要且充分ナル条件ハ, C ノ任意ノ ε ノ
 subcontinuum A, B ナレバ,

5) C. Kuratowski et Z Januszewski, F.M. 24/1 B.Kuaster F.M. 24/3

$$A \cdot B \rightarrow \dots, \dots \rightarrow \dots \rightarrow A \cdot C \cdot B$$

1) 何レカーツが成立スルコト。即チ $H-B$ キシキ $B-A$ ナル *subcontinuum* A, B が存在シタイコト。

(証明) 必要ナコト モシ $A-B \neq 0 \neq B-A$ ナル *subcontinuum* A, B がアレバ $A+B$ ハ C ノ一ツノ *subcontinuum* テ *decomposable* テアレ。コレハ不合理。

充分ナコト。モシ C が D ナル *decomposable continuum* ヲ含メバ、 D ハ P ノ *proper subcontinuum* A, B ノ和ヲ成ハサレルカラ、 $A-B \neq 0 \neq B-A$ トナル。(終)

A, B ヲ *disjoint* ナ集合、 M ヲ *continuum* トスル時 $MA \neq 0 \neq MB$ 且 M ノ *proper subcontinuum* ハ A, B ノ和ヲ同時ニ含メタイトキ M ハ A ト B トニ割シテ *atomic* テアレトイフ。⁶⁾ M が *bounded continuum* テ A, B が *disjoint + closed subset* トアレバ、 M ハ A, B ニ割シテ *atomic continuum* ヲ含ム。⁷⁾

定理 22

シカ *bounded perfectly indecomposable continuum* ナルモノ、必要且充分ナル條件ハ、 C ヲ *disjoint + subcontinuum* A, B ニ割スル *atomic continuum* が A, B ヲ同時ニ含ムコトテアレ。シカシ斯ルモノ *atomic continuum* ハ *unique* = 決マル。

(証明) 必要ナコト。前定理ヨリ明カ。充分ナコト。シカ *decomposable continuum* D ヲ含メバ、前ト同じ様ニ、 $D = H + K$ トカケル。 $H \ni a$ 、 $K \cdot a = 0$ ナル a ヲトレバ a ト K = 割スル *atomic continuum* ヲ H が含ムカラ⁷⁾ コレハ假定ニ反スル。(終)

§3. *indecomposable continuum*, *hyperspace*

§§ 1.2, 結果ヲ用テ *indecomposable continuum*

1) *hyperspace* ノ關係ヲ述ベヨウ⁸⁾

indecomposable continuum ハ *Kuratowski - Janiszewski*

6) R.L. Moore: *pt. set theory* (1932) p.18

7) R.L. Moore: *Loc. cit* p.21. (Th. 34)

8) 本. § = 同シハ Killey: *Trans. A.M.S.* 1. 142 参照

が成り立つ = component decomposition である。即ち

$$C = p(a, C) + p(b, C) + \dots$$

$$p(a, C), p(b, C) = 0 =$$

$\Rightarrow p(a, C), \dots$ は所謂 semi-continuum. シカモ indecomposable の下層である。⁹⁾

定理 3.1 $p(a, C) \equiv p(b, C)$ となるのは必要且充分である。
 介線 α と β とが ε より遠くを隔てた空間 $\varepsilon - C$ で arc-wise であること

(証明) $p(a, C) \equiv p(b, C)$ ならば α と β とは C の proper subcontinuum D を経るから、 α と D とは ε より遠くを C を通らずに結べる。又、 β と D とは C を通らずに結べる。即ち、 α と β とは ε より遠くを C を通らずに simple arc を経る。逆 = α と β とが $\varepsilon - C$ で simple arc を経るから、これは $0 \leq t \leq 1$ の位相的写像である。即ち、一価連続函数 $\alpha(t)$ が存在する、

$$a = \alpha(0), b = \alpha(1), C_t = \alpha(t) + C \quad (0 < t < 1)$$

が成り立つ。また $C_t \neq C$ である。

もし $C_t \subset p(a, C)$ ならば $\alpha(t) \in p(a, C)$ 。もし

$C_t - p(a, C) \neq \emptyset$ となるならば、 C_t は $\alpha(t)$ の component, 共通部分を持つ。これは、component の性質から $C_t = C$ となるはずである。すなわち、 $t = \alpha(t)$ かつ $t < p(a, C)$ 即ち $\alpha(t) \in p(a, C)$ 従って $p(a, C) \equiv p(b, C)$ 。

定理 3.2 C が indecomposable continuum となるのは、必要且充分条件は $\varepsilon - C$ が arc-wise であること。

(証明) $\varepsilon - C$ が arc-wise ならば、定理 3.1 により component は唯一つである。これは、少くとも $\alpha(t)$ であることである。逆 = もし C が decomposable ならば、 $C = A + B$ となる A, B の proper subcontinuum A, B があるから、 A と B とは C を通らずに simple arc

⁹⁾ Kuratowski - J. M. vol 1. S. Mazurkiewicz F. M. vol 10

¹⁰⁾ Mazurkiewicz et. Borsuk in cit

ヲ結べる ε - C 内ノ任意ノ点 A 及 B 十 ε - C 内ニ simple arc ヲ結べるコトニナル。即チ、 ε - C 内ノ任意ノ simple arc ヲ結べるコトハ不合理的。

定理 3.3

C が perfectly indecomposable continuum ナル必要且充分ナル條件ハ、 C 1 hyperspace $\mathcal{C}$ が acyclic ナルコト

(証明) 充分ナルコト。 C が perfectly indecomposable ナラば、 C ハ decomposable continuum D ヲ含まず、 $D = A + B$ トカケルカラ、 A ト B トハ D ヲ通ラナイ様ニ simple arc ヲ結べる。 A ト D トハ B ヲ通ラナイ様ニ B ト D トハ A ヲ通ラナイ様ニ simple arc ヲ結べる。コレハ $\mathcal{C}$ が simple closed curve ヲ含まずナリ、acyclic ナルコトニ反スル。

必要ナルコト。 $\mathcal{C}$ = 点 A, B が $A \subset B$ ナルトキ、 A, B ヲ結フ simple arc ヲ $\{C_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ 、 $C_0 = A$ 、 $C_1 = B$ トスル。 $\{C_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ ノ C へノ projection ヲ H トスレバ、 H ハ定理 1.2 = ヨリ、continuum = ナル。故ニ H ハ indecomposable ナラば、 C ハ perfectly indecomposable ナラズ。然レバ H ヲ通ラヌ simple arc ヲ結べる。又、 H ヲ α トスレバ、 $\alpha \in C_\alpha$ ナル C_t カアルカラ、 α ト C_t トハ H ヲ通ラナイ simple arc ヲ結べる。結局定理 3.2 = ヨリ、 H が decomposable ナラば、 A ト B トヲ結フ arc ハ必ず α 1 arc, projection ナアル continuum, 点ヲ通ル、故ニ、スベテノ t = 對シテ、 $C_t \subset B$ ナアル。モシ B が H ノ proper subcontinuum ナラバ、 $A \subset B$ ナル故ニ H ヲ通ラナイ arc カアルコトニナル。コレハ不合理的。依ツテスベテ、 $C_t =$ 對シテ $C_t \subset B$ 。此ニスベテ、 C_t ハ A ヲ含むコトヲ証明スル。 A ヲ含む $C_t (0 \leq t \leq \alpha)$ ノ全体ノ C へノ projection, closure ハ $C_\alpha =$ 一致スル。モシ $C_\alpha =$ 一致シナレバ、 A ヲ含む更ニ他ノ $C_t (0 \leq t \leq \alpha)$ カ見出カレル。故ニ、 $A \subset C_\alpha$ 、故ニ C 1 perfect ヨリ、 $\{C_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ ノ inclusion = 閉シテ ordered set = ナル。故ニ、 $C_\alpha = A$ ヲ含ミ $B =$ 含マ

$\mathbb{R}$ スベテ, subcontinuum なる $\{C_i\}$ なる hyperspace ナルコトヨリ
 $A \cup B$ ヲ結ブ simple arc ヲ作リテナル 故 $\{C_i\}$
 $\{C_i\}$ なる arc = 一致セヌバナラズ. 又, A, B 間, $A \cap B = \emptyset$
 $\mathbb{R}$ ナル C , subcontinuum ナラバ, $A \cup B = \text{閉スル } C$,
 atomic continuum ヲトレバ, 定理 2.2 以上, 第三項ヨリ
 $A \cup D$, $D \cup B$ ヲ結ブ arc ガ唯一ツ, A, B ヲ結ブ arc
 $=$ ナル. (終)

特ニ注意スベキハ, Euclid 平面, 単位正方形 S = 閉スル
 hyperspace 也ナリ, S 内ニナル $\text{perfectly indecomposable}$
 continuum 有ハ, 2nd category = ナク ⁽¹²⁾ decomposable
 continuum 有ハ, 1st category 有集合ヲ作リテナル.
 (コ) 後者, 事實ハ 容易ニ証明サレルコトヲアルカ) 然レニ
 一方 S 内, jordan continuum 有ハ S 内ニ dense ナ集合
 ヲ作リテナル. (コレハ 任意, continuum ヲトレバ
 ソレガ jordan continuum / 同少列極限ヲ表ハサレル
 ト云フコトカラ知ラレル.)

11) S. Magurkiewicz i F.M. vol 18 pp 172 - 3

12) S. Magurkiewicz i F.M. vol 46 p. 15 p.