



Title	Polya-Szegö ノ Aufgaben und Lehrsätzeノ中ノ定理 ニ就イテ
Author(s)	豊田, 五浪
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(3), p. 15-21
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75161
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

26. Polya - Szegő) Aufgaben und Lehrsätze
) 中) 定 理 = 就 イ テ .

豊 田 五 浪 (身 延 中 学 校)

表題ノ書物ノ第二卷ニ、十進法デ表ハサレタ素数ヲ

$$p = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_i \geq 0)$$

トスルトキ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ハ既約デアルト云フノガアリマスガ、コノデハ少シク拡張シタ形デ述
 ベテ更タイト思ヒマス。思ヒ違ヒカモ知レマセンノデソノ点御評議ヒ

次ニ結論カラ先ニ述ベルト、

定理 素数 λ + 進法デ表ハシタ結果ヲ

$$P = a_0 t^x + a_1 t^{x-1} + \dots + a_n \quad (a_i \geq 0) \dots \dots (1)$$

トスルト、

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ハ (勿論有理数体ニ於テ) 既約デアル。但シ $t \geq 4$ 。

ト (1)ガ可約ナリトスレバ

$$f(x) = g(x) h(x)$$

$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k$$

$$h(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m$$

$$P = f(t) = g(t) h(t) \text{ デスカラ } g(t) = \pm p, h(t) = \pm 1$$

トシテオイテヨロシイ。要ヲトルトキハ -1 ヲカケテオケバヨイカラ $g(t) = p, h(t) = 1$ トシテモ一般性ハ失ハレマセン。 -1 ヲカケタ解ニ b_0 ガ更ニナツタトスルト $g(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow +\infty)$ トナル。 $g(t) = p$ ヨリ $-g(x)$ ハ正ノ実根ヲ持ツ。然ルニ既定ニヨレバ $ax = 0$ デカラ $f(x) = 0$ ハ正ノ実根ヲモテマセン。故ニ $b_0 > 0$ a_0 ニ就イテモ同様。

$f(x) = 0$ ノ任意ノ根ハヨク知ラレタ Cauchy ノ定理ニヨツテ

$$|x| \leq 1 + \max \frac{a_i}{a_0} \leq 1 + (t-1) = t \dots \dots (2)$$

故ニ $a_0 \geq 2$ トスルト

$$|x| \leq 1 + \frac{t-1}{2} = \frac{t+1}{2}$$

$$t=4 \text{ ナル時実カラ } \frac{t+1}{2} < t-1 \dots \dots (3)$$

從ツテ $|x| < t-1$ 故ニ $f(x) = 0$ ノ根ハ複素数平面上原点ヲ中心半径 t ナル円 (間ヲ含メテ) 内ニアリマス。 $h(x) = 0$ ノ根ヲ $\alpha_i (i=1, \dots, n)$ トシマス

$$h(t) = c_0 (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n) = 1$$

$$c_0 \pi |t - \alpha_i| = 1$$

c_0 ハ 勿論正整数デアルカラ π ナク α_i ニ就イテ

$$|t - \alpha_i| \leq 1$$

トナリ、 z ヲ中心トシテ〔第一圖〕半径 1ナル円ヲ畫クトソノ円内
(周ヲ含メテ) $= h(z) = 0$ ノ根ガ

存在スルコトニナリマスカラ、ソレ
ヲ改メテメトスレバ $|z| \leq 1$
($t=1$ ハ $h(z)=0$ ノ根デナイ)

ダカラ $\alpha_0 \geq 2$ ナラバ(3)ヨリ
不都合ヲ生ジマス。依ツテ改メテ

$a_1 = 1$ トスルト

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$g(z) = z^l + b_1 z^{l-1} + \dots + b_l$$

$$h(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m$$

次ニ $h(t) = 1$ ヨリ $h(z) = (z-t)Q(z) + 1$ ト書ケ、 $Q(z)$
ハ整係数ノ多項式デアル、

$$Q(z) = z^{m-1} + q_1 z^{m-2} + \dots + q_{m-1}$$

ソシテ

$$h(z) = z^m + \dots + (1 - t q_{m-1})$$

故ニ

$$c_m = 1 - t q_{m-1}$$

故ニ

$$b_l c_m = b_l (1 - t q_{m-1}) = a_n$$

$$\therefore |b_l| \cdot |1 - t q_{m-1}| = a_n$$

$a_n \neq 0$ ハ明ラカデ且ツ $a_n \geq t-1$ 、從ツテ $q_{m-1} = 0$ 、 $b_l = a_n$
カ、 $q_{m-1} = 1$ $b_l = -1$ 、後者ナラバ $z=0$ ノ時 $g(z) = -1$
 < 0 、一方 $g(t) = p > 0$ テ $g(z) = 0$ 即チ $f(z) = 0$ 正
根ヲ有スルコトニナル矛盾。故ニ

$$h(z) = (z-t)Q(z) + 1$$

$$g(z) = z^l + \dots + a_n$$

トナリマス。然ルトキハ $f(0) = g(0) = a_n$ トナリ、 $h(0) = 1$

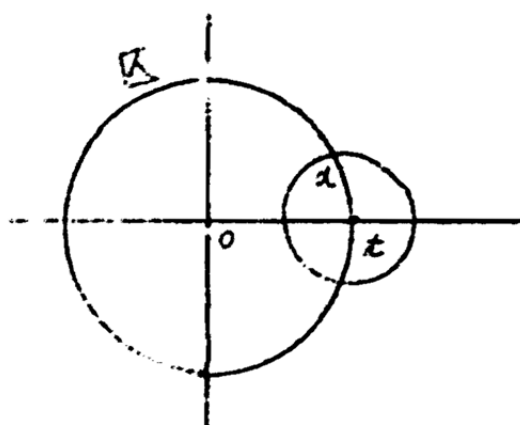


fig. 1

トナラネバナリマセンカラ $Q(z)$ ハ更ニズデ割レテ結局

$$h(z) = z(z-\epsilon)Q_1(z) + 1 \text{ ----- (4)}$$

然ルニ圖ニヨツテ明ナル如ク円区外ニ $f(z)=0$ ノ根ハナイカラ
 $|h(z)| = \pi |z - \alpha_i|$ ハズガ $(\epsilon - \epsilon, +\infty)$ ニ於テ $\epsilon - \epsilon$
ヨリ次第ニ増加スルトキハ増加シマス。但シ ϵ ハ非常ニ小サイ正数。
 $h(\epsilon) = 1 > 0$ ヨリ $h(z)$ 自身ガ $z = \epsilon$ ニ於テ増加ノ状態ニア
リマス。何者、モシ減少ノ状態ニアルトスルト $\epsilon < z$ ニ於テハカ輪
 $h(z) = 0$ ノ根ハナイカラ $h(z) \rightarrow +\infty (z \rightarrow +\infty)$ ヨリ遂
ニハ $h(\gamma) = 1$ ガ $\epsilon < \gamma$ ニ就イテ成立スルコト ナルガ、ヨク
知ラレタ *Yamov* ノ定理ニヨリ $h(z) = 0$ ノスベテノ根ヲ含ム円
区外ニ $h'(z) = 0$ ノ様ガアルコトニナリ矛盾ヲ生ズル。従ツテ

$$h'(\epsilon) > 0 \text{ ----- (5)}$$

一方(4) ヨリ

$$h'(\epsilon) = \epsilon Q_1(\epsilon) \text{ [但シ之ハ餘計ノ事ノ様デス]}$$

故ニ $Q_1(\epsilon) > 0$ トナリマス。サテ $h(\epsilon-1) > 0$ ナルコトハ明ラ
カデ然カモ正整数ナル故

$$h(\epsilon-1) \geq 1 \text{ ----- (6)}$$

(5) ニヨレバ $h(\epsilon-\epsilon) < 1$ ナル $\epsilon (> 0)$ ガ存在シマスカラ

(6) (6) ヨリ $h(\beta) = 1$ ($\epsilon-1 \leq \beta < \epsilon$) ナル β ガ存在シナ
ケレバナリマセン。ソコデ

$$h(\beta) = 1 \text{ ----- (7)}$$

$h(\epsilon) = 1$ ト(7) トカラ

$$\pi |\epsilon - \alpha_i| = \pi |\beta - \alpha_i| = 1$$

今、線分 $\beta\epsilon$ ノ垂直二等分線 ℓ ヲ
引クト (第二圖参照) ℓ ノ左側ニ是
ク α_i ガ存在スルモノトシマス

$$|\epsilon - \alpha_i| \geq |\beta - \alpha_i| \quad (i=1, \dots, n)$$

トナリ上ノ式ハ不成立。故ニ ℓ ノ右側ニ
少ナクトモ一ツノ α_i ガ存在シナケレバ

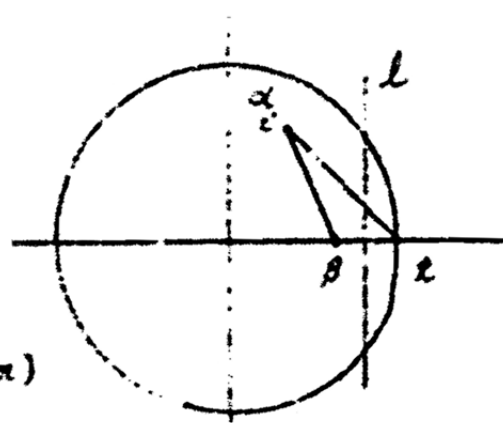


fig. 2

ナラナクナリ。ソレヲ ϑ トシマス。 $\beta \geq t-1$ ダカラ

$$|\vartheta| \geq t - \frac{1}{2} \text{ ----- (8)}$$

ガ成立シマス。

II. サテ $f(x)=0$ ノ根デアル α_i ニ就イテハ

$$x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_n = 0$$

ノ唯一ノ正根ヲ ρ トシマス (Cauchy)

$$|\alpha_i| \leq \rho$$

先ヅ $a_1 \neq 0$. 何トナレバモシ $a_1 = 0$ ナラ

$$\begin{aligned} (t-1)^n - a_1 (t-1)^{n-1} - \dots - a_n &\geq (t-1)^n - (t-1) \left[\frac{(t-1)^{n-1} - 1}{t-2} \right] \\ &\geq \frac{(t-1)^n (t-3) + (t-1)}{t-2} \end{aligned}$$

$$t \geq 4 \quad \text{ヨリ} \quad > 0$$

トナリ之レハ (8) ニ矛盾シマス。次ニ $a_2 = 0$ ナラ

$$\begin{aligned} x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_n \\ &\geq x^n - (t-1)x^{n-1} - (t-1) \left[\frac{x^{n-2} - 1}{2-1} \right] \\ &\geq \frac{[(t-1)x^2 - (t-1)\{x(x-1)+1\}]x^{n-2} + (t-1)}{x-1} \end{aligned}$$

然ルニ $x = t - \frac{1}{2}$ ノ時ハ $(x-1)x^2 > (t-1)\{x(x-1)+1\}$ 即
チ $x > (t-1)\left\{1 + \frac{1}{x(x-1)}\right\}$ ガ $t \geq 4$ ナラバ 成立シマスカ
ラ > 0

之レモ (8) ニ矛盾シマス。従ツテ $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$

$f(z)=0$ ニ於テ. $z = (t-1)z$ トオクト

$$(t-1)^n z^n + (t-1)^{n-1} a_1 z^{n-1} + (t-1)^{n-2} a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

之レヲ改メテ

$$f^*(z) = z^n + \frac{a_1}{t-1} z^{n-1} + \frac{a_2}{(t-1)^2} z^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{(t-1)^n} = 0$$

ト書き. ヨク知ラレタ Montel ノ定理ヲ適用シマス。根 α^* ニ就

イテ、

$$|\alpha^*| \leq \left| 1 - \frac{a_1}{t-1} \right| + \left| \frac{a_1}{t-1} - \frac{a_2}{(t-1)^2} \right| + \left| \frac{a_2}{(t-1)^3} - \frac{a_3}{(t-1)^4} \right| + \dots$$

$$\dots + \left| \frac{a_{n-1}}{(t-1)^{n-1}} - \frac{a_n}{(t-1)^n} \right| + \left| \frac{a_n}{(t-1)^n} \right|$$

$a_i \leq t-1$ ヨリ 0 デナイ a_i ニ就イテ

$$1 \geq \frac{a_1}{t-1} \geq \frac{a_2}{(t-1)^2} \geq \dots \geq \frac{a_i}{(t-1)^i} \geq \frac{a_n}{(t-1)^n} \geq 0$$

デアルコトガ分カルカラ

$$|\alpha^*| \leq 1 - \frac{a_1}{t-1} + \frac{a_1}{t-1} - \frac{a_2}{(t-1)^2} + \frac{a_2}{(t-1)^2} - \frac{a_3}{(t-1)^3} + \left| \frac{a_3}{(t-1)^3} \right|$$

$$- \frac{a_4}{(t-1)^4} + \dots + \left| \frac{a_{n-1}}{(t-1)^{n-1}} - \frac{a_n}{(t-1)^n} \right| + \frac{a_n}{(t-1)^n}$$

コノデ $a_n = 0$ デモ、0 デナクトモ

$$|\alpha^*| \leq 1 + \frac{2(t-1)}{(t-1)^n} \left[1 + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \dots \right] \leq 1 + \frac{2}{(t-1)^2(t-2)}$$

$$\text{故ニ } |\alpha^*| \cdot (t-1) \leq t-1 + \frac{2}{(t-1)(t-2)}$$

然ルニ $t \geq 4$ ヨリ 右辺ノ第ニ項ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ小トナリ

$$|\alpha_i| \leq t - \frac{1}{2}$$

之レ又 (8) ト矛盾シマス、結局 $t \geq 4$ ノ時ハ $f(x)$ ハ既約

[$t = 2, 3$ ノ場合ガ残サレタコトニナリマスガ、コノ様ナコトハ既二分ツテ居ルノデセウカ。御教示下サイ、]

前略、先日投稿シマシタ時 *Aufgaben* ガ年許ニナク、ウクウサト理リフドイ証明ヲ述ベテ申訳アリマセン。サテ *Polya* ノ本ヲヨク見ルト、ソコノ $t=10$ ノ証明ハ $t \geq 3$ ナラバサテハマルコトヲ知リ $t=2$ ナラバ、必シク *Modify* スレバ出来ルコトニ察付イタノデ、コノニ記シテ御高評ヲ戴ク次第デス。要スルニ *Polya* ノ方法ガ数種ト弄レテ居タノデシタ。

$t \geq 3$ トシマス。

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \dots \dots \dots (1)$$

1 根ノ中デ実部ガ正ナルモノニ就イテハ

$$|\alpha| < \frac{1+\sqrt{4t-3}}{2} \quad \left[t=10 \text{ ナラバ } \frac{1+\sqrt{37}}{2} \right]$$

然ルニ

$$t - \frac{1}{2} > \frac{1+\sqrt{4t-3}}{2} \quad (t \geq 3)$$

一方ニ於テ (1) ノ一 根 ϑ ニツイテハ、 $|\vartheta| > t - \frac{1}{2}$ ガ成立スルコトハ先ニ述べタ通りデスカラ $f(z)$ ハ既約

$t=2$ ノ時

$$f(z) = z^n + \varepsilon_1 z^{n-1} + \varepsilon_2 z^{n-2} + \dots + 1 \dots \dots \dots (2)$$

(ε_i ハ 0 ヌハ 1)

トスルト、 $n=2$ ニ対スル素数ハ 5 ト 7、ソシテソレニ対スル多項式ハ z^2+1 、 z^2+z+1 、トナリマスカラ問題外、故ニ $n \geq 3$

トシテ

$$\left| \frac{f(z)}{z^n} \right| \geq R \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1}{z} + \frac{\varepsilon_2}{z^2} \right\} - \frac{1}{|z|^3} - \dots - \frac{1}{|z|^n}$$

$$> R \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1}{z} + \frac{\varepsilon_2}{z^2} \right\} - \frac{1}{|z|^3 - |z|^2}$$

z ノ代リニ ϑ ヲ代入スルト

$$0 > R \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1}{\vartheta} + \frac{\varepsilon_2}{\vartheta^2} \right\} - \frac{1}{|\vartheta|^3 - |\vartheta|^2}$$

$|\vartheta| > 2 - \frac{1}{2} = 1.5$ ナルコトハ全ク $t \geq 3$ ノ場合ト同様デスカラ ϑ ノ偏角ガ $\frac{\pi}{4}$ ヲ超エナイ、即チ ϑ^2 ノ偏角ガ $\frac{\pi}{2}$ ヲ超エナイコトガ容易ニ証明出来テ

$$R \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1}{\vartheta} + \frac{\varepsilon_2}{\vartheta^2} \right\} \geq 1$$

$$\therefore 0 > 1 - \frac{1}{|\vartheta|^3 - |\vartheta|^2}$$

然ルニ $|\vartheta| > 1.5$ ナラバ之レハ成立シマセン、故ニ (2) モ既約。