OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Complex-Banach space二於ケル解析函数ニツイテ（II）
Author(s)	霜田, 伊左衛
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(3), p. 22-27
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75162
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

27. Complex-Banach space ニ於ケル解析函数ニツイテ (II)

霜田伊左衛 (阪大)

多変数函数論ニ於ケル Hartogs ノ定理ヲアル條件ノモトニ Complex Banach space ニ拡張シタイ、其ノ為ニ必要ナル定理ヲ A.E. Taylor 氏ノ論文[1]カラ掲載スル事ニシマス。C ヲ complex plane, E, E' ヲ夫々 complex-Banach space トスルトキ

定理 A $|\alpha|<R$, $\|\chi\|<S$ デ定義セラレタ E' ノ値ヲトル函数 $f(\alpha,\chi)$ ガ各ノ変数ニ関シテ regular デアレバ $0<R_1<R$ ナル任意ノ R_1 ニ対シテ $\|\chi\|<S$ ニアル Open set O ガ存在シ $|\alpha|<R_1$, O デ $f(\alpha,\chi)$ ハ regular トナル。

Lemma. $f(\alpha,\chi)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|\chi\|<S$ ニ於テ各変数ニ関シテ regular 且 $|\alpha|<R$, $\|\chi\|<\delta(<S)$ デ regular ナレバ $f(\alpha,\chi)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|\chi\|<S$ デ regular デアル。

証明 $f(\alpha,\chi)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|\chi\|<\delta$ デ regular ナル故

$$f(\alpha,\chi)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha,\chi) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ナル Y 級数ニ展開セラレル。コヽニ $f_n(\alpha,\chi)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|\chi\|<\infty$ デ連続デ α ニツキ regular デ且 χ ニツキ n 次ノ Homogeneous Polynomial デアル。今 $R_1<R$ ヲ任意ニトレバ $|\alpha|\leq R_1$ ナルトキ (1) ハ $\|\chi\|<\delta$ 内ノ任意ノ

compact set ヲ Σ ガ変ズルトキ (1) ハ一様収斂スル。故ニ

$$\sup_{G\in K} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\chi\in G,\ |\alpha|\le R_1} \|h_n(\alpha,\chi)\|} = \frac{1}{S} \quad ^{2)}-$$

故ニ任意ノ正数 ε ニ対シ $S-\varepsilon=S_0$ トスレバ $n_0(S_0)$ ガ定マリ

$$\|h_n(\alpha,\chi)\| \le \frac{1}{S_0^n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

但シ $n\ge n_0(S_0)$, $|\alpha|\le R_1$, $\chi\in G$ (G ハ Σ ノ任意ノ element)
又 (1) ハ α ヲ fix スレバ χ ニツキ $\|\chi\|<S$ デ regular ナル故 α ヲ fix スレバ

$$\sup_{G\in\Sigma} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\chi\in G} \|h_n(\alpha,\chi)\|} \le \frac{1}{S}$$

乃チ任意ノ ε ニ対シ $S-\varepsilon=S_1$ トオケバ $n_1(\alpha,S_1)$ ガ定マリ

$$\|h_n(\alpha,\chi)\| = \frac{1}{S_1^n} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

但シ $n\ge n_1(\alpha,S_1)$, $\chi\in G$ (G ハ Σ ノ任意ノ element)
今 $E[y\mid y=S,\chi,\ \chi\in G]=G'$ トオケバ G' ニ於テハ (2) ヨリ

$$\|h_n(\alpha,y)\| \le \left(\frac{S_0}{S_0}\right)^n$$

$$\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha,y)\| \le \log\frac{S_1}{S_0} \quad (n\ge n_0,\ |\alpha|=R_1) \cdots (4)$$

又 (3) ヨリ $\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha,y)\|\le 0$ $(n\ge n_1(\alpha,S_1))$ ----- (5)

然ルニ $\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha,y)\|$ ハ y ヲ fix シタトキ $|\alpha|\le R_1$ 上デ最大値ハ必ズ $|\alpha|=R_1$ 上デトル。何故ナレバ若シ $|\alpha_0|<R_1$ デ最大値ヲトッタトスレバ $0<\rho<R_1-|\alpha_0|$ ナル任意ノ ρ ニ対シテ $0\le\theta<2\pi$ ナルトキ

$$\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha_0,y)\| \ge \frac{1}{n}\log|h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta},y)\|$$

$$\therefore \|h_n(\alpha_0,y)\| \ge \|h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta},y)\|$$

$h_n(\alpha,y)$ ガ常数デナケレバ アル ρ ニ於テ

$$\|h_n(\alpha_0, y)\| > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|h_n(\alpha_0 + \rho e^{i\theta}, y)\|\, d\theta.$$

ヲ $h_n(\alpha, y)$ ハメニツキ regular デアルカラ

$$h_n(\alpha_0, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_n(\alpha_0 + \rho e^{i\theta}, y)\, d\theta.$$

$$\therefore \|h_n(\alpha_0, y)\| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|h_n(\alpha_0 + \rho e^{i\theta}, y)\|\, d\theta.$$

之ハ不合理デアル。

今 $U_n(\alpha, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{n}\log^+ \|h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\| \frac{R_1^2 - \gamma^2}{R_1^2 - 2R_1\gamma\cos(\theta - \varphi) + \gamma^2}\, d\theta.$

トオケバ $U_n(\alpha, y)$ ハ $|\alpha| < R_1$ デ調和デ $U_n(R_1 e^{i\varphi}, y) = \frac{1}{n}\log^+ \|h_n(R_1 e^{i\varphi}, y)\|$

$$\therefore \frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha, y)\| - U_n(\alpha, y) \leq 0 \quad (|\alpha| = R_1)$$

$\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha, y)\|$ ハ常数カ又ハ境界デ最大値ヲトル函数デアルカラ、常ニ

$$\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha, y)\| - U_n(\alpha, y) \leq 0 \quad (|\alpha| \leq R_1) \cdots\cdots (6)$$

一方

$$U_n(\alpha, y) \leq \frac{R_1 - \gamma}{R_1 + \gamma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{n}\log^+ \|h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\|\, d\theta.$$

(4), (5) ヨリ Lebesgue ノ定理ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} U_n(\alpha, y) \leq \frac{R_1 - \gamma}{R_1 + \gamma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log^+ \|h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\|\, d\theta.$$

$$= 0$$

今 $0 < R_0 < R_1$ ナル R_0 ヲ任意ニトレバ $U_n(\alpha, y) < \varepsilon$, $(n \geq n_\varepsilon, |\alpha| \leq R_0)$

(6) ヨリ $\|h_n(\alpha, y)\| < (e^\varepsilon)^n$

$$\therefore \sqrt[n]{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\leq R_0} \|h_n(\alpha, x)\|} \leq e^\varepsilon \cdot \frac{1}{S_1}$$

G ハ任意デアルカラ

$$\sup_{y\in E} \overline{\lim}\ \sqrt[n]{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\leq R_0} \|h_n(\alpha, x)\|} \leq \frac{1}{S_1}$$

乃4 $\sum_0^\infty f_n(\alpha, \chi)$ ハ $|\alpha| \leq R_0$, $\|\chi\| < S_1$ 内ノ任意ノ compact set, デ一様収斂スルカラソコデ正則ニナル。R_0, S_1 ハ夫々 R, S ニ如何程近クトモ良イカラ、$f(\alpha, \chi)$ ハ $|\alpha| < R$, $\|\chi\| < S$ デ regular デアル。

定理 1 $C \times E$ 内ノ任意ノ domain D デ定義セラレ、E' ノ値ヲトル函数 $f(\alpha, \chi)$ ガ各ノ変数ニ関シテ regular ナルトキ $f(\alpha, \chi)$ ハ D デ regular デアル。

証明 D 内ノ任意ノ点 P ノ近傍デ正則ナレバヨイ。一般性ヲ失ハズニ P ヲ 0 点ニトル。$R > 0$, $S > 0$ ヲ適当ニトレバ $|\alpha| < R$, $\|\chi\| < S$ ハ D ニ含マレル。$f(\alpha, \chi)$ ハ此所デ各ノ変数ニ関シテ regular デアルカラ、定理A ニヨリ任意ノ $R_1 < R$ ニ対シテ $\|\chi\| < \frac{1}{3} S$ 内ニ open set $\mathfrak{A}$ ガ存在シテ $f(\alpha, \chi)$ ハ $|\alpha| < R_1$, $\chi \in \mathfrak{A}$ デ regular ニナル。$\mathfrak{A}$ ニ含マレル $\|\chi_1 - \chi\| < S_1$, $\chi_1 \in \mathfrak{A}$ ヲトレバ $f(\alpha, \chi)$ ハ $|\alpha| < R_1$, $\|\chi_1 - \chi\| < S_1$ デ regular デアルヲ fix スレバ χ ニ関シテハ $\|\chi_1 - \chi\| < \frac{2}{3} S$ デ regular デアルカラ Lemma ニヨリ $f(\alpha, \chi)$ ハ $|\alpha| < R$, $\|\chi\| < \frac{1}{3} S$ デ regular トナル。依ツテ $f(\alpha, \chi)$ ハ D デ regular トナル。（以上）

此ノ定理ノ一応用トシテ次ノ場合ヲ考フ。E デ定義セラレ E' ノ値ヲトル函数ノ folge $f_n(\chi)$ ヲ component トシ E'' ノ値ヲトル函数 $f(\chi)$ ヲ考ヘル。乃チ $f(\chi) = (f_1(\chi), f_2(\chi), \cdots\cdots)$ ヌ

$$\|f(\chi)\| = \sqrt[p]{\sum_1^\infty \|f_n(\chi)\|^p}$$ デ定義スル。

次ニ $C \times E$ デ定義セシ E'' ノ値ヲトル函数

$$F(\zeta, \chi) = \sum_1^\infty f_n(\chi) \zeta^n$$

ヲ定義スル。

定理 2 $f(\chi)$ ガ E ノ domain D デ regular ナル為ノ條件ハ

i) $f(\chi)$ ガ strongly continuous

ii) $F(\zeta, x)$ が $|\zeta|<1$, $x\in D$ で regular

証明 i) $f(x)$ が regular なれば i) は自然満足されてゐる。x を fix すれば $f(x)$ は一定なる故に $\sqrt[\rho]{\sum \|f_n(x)\|^\rho} < \infty$.

$$\therefore \quad \Big\| \sum_n^m f_n(x)\zeta^n \Big\| \le \sqrt[\rho]{\Big(\sum_n^m \|f_n(x)\|^\rho\Big)\Big(\sum_n^m |\zeta|^{\rho n}\Big)}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt[\rho]{1-|\zeta|^\rho}} \sqrt[\rho]{\sum_n^m \|f_n(x)\|^\rho} < \varepsilon$$

但し $m>n>n_0(\varepsilon, x)$, $|\zeta|<\rho<1$.

依て $\sum f_n(x)\zeta^n$ は一様収斂するから ζ について regular である。$\rho<1$ で ρ は任意だから $F(\zeta, x)$ は x を fix するとき ζ について $|\zeta|<1$ で regular である。次に ζ を $|\zeta|<1$ に fix する。$f(x)$ が regular なれば $f_n(x)$ は又 regular である。[3]

$$\Big\| \sum_n^m f_n(x)\zeta^n \Big\| \le \|f(x)\| \frac{|\zeta|^n}{\sqrt[\rho]{1-|\zeta|^\rho}}$$

D 内の任意の compact set G をとれば i) により $\|f(x)\| < M_G$ なる M_G が存在する。$\therefore$ $m, n \ge n_1(\varepsilon)$ なるとき $|\zeta|<1$ なる故

$$\Big\| \sum_n^m f_n(x)\zeta^n \Big\| < \varepsilon.$$

依て $\sum f_n(x)\zeta^n$ は D の任意の compact set で一様収斂する。故に D に於て $F(\zeta, x)$ は ζ について regular である。故に定理1により $|\zeta|<1$, $x\in D$ で $F(\zeta, x)$ は regular なり。

ii) 逆に $F(\zeta, x)$ が regular であるとする。

$$F(\zeta, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\zeta^n$$

$f_n(x)$ は D で regular なり。又 $f(x)$ は連続 $f(x)$ は regular なり。[1]

---

1). A.E. Taylor ; On the properties of analytic function in abstract space, Math. Ann. 115 (1938).

2)、本紙第一号、著者、complex-Banach space ニ於ケル冪級数ニツイテ参照。

3)、昨年十月当地数学談話会ニ於テ井岡君ノ発表シタ定理。

(1947. 1. 24 受付)