



Title	壬生雅道氏ヨリ吉田耕作氏ヘノ手紙
Author(s)	壬生, 雅道
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(3), p. 27-33
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75163
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

28. 土生雅道氏 ヨリ 吉田耕作氏 へノ手紙

(名大)

locally bicomact group ノ構造論ヲヤルトキノ例ノ重要ナ
*Lemma*ノ証明ガ実ハ無限積空間ヲ考ヘルコトニヨリ非常ニ簡單ニ出
 来ルコトガ分リマシタ。(*separability* ヲ除イタトキノ直接証
 明デス)

Lemma G ヲ *locally bicomact, connected+abel*
 群デ *bicomact* デハナイトシマス。 $\bar{U}$ ガ *bicomact* デアルヨ
 ウナ G ノ *cins*ノ *symmetric*ノ近傍ヲ U トスレバ、 U ノ *boundary*
 $U' = \bar{U} - U$ ノ点 d ニシテ $nd \in U \iff n=0$ ナル $d \in U'$ ガ存在ス
 ル。

証明 $U_1 = U$ トオキマス

一般ニ (1) $U_{n+1} = U_n + U_1$ トシマスト次ノ関係式ノ成立スルコ
 トハ容易ニ分リマス。

$$(2) \quad U_r + U_s = U_{r+s}$$

$$(3) \quad \bar{U}_r + \bar{U}_s = \overline{U_{r+s}}$$

次ニ (4) $U'_n = \bar{U}_n - U_n$ (ココノ一ハ集合トシテノ引キ算デス)
 トオケバ $U'_n \neq 0$ ナルコトハ明白デス。

更ニ次ノ関係式ガ成立シマス。

$$(5) \quad U_r + \bar{U}_s = U_{r+s}$$

関係式 (3) クラ $C \in U_n$ トスレバ

(6) $C = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ ナル形ニ書き表スコトが出来るマス。

$$d_i \in \overline{U}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{実ハ } d_i \in U', \quad i=1, 2, \dots)$$

関係式(5)ガアルタメ $d_i \in U', \quad i=1, 2, \dots, n$ ナルコトガスグ分リマス。

コノマデハ *Pontryagin* ノ本ト全ジコトデスカラ次ニ U' 即チ U' ヲ G ノ部分空間ト考ヘレバ *bicomact space* ニナリマスガ今 U' ノ可附格無限積空間 Ω ヲ考ヘマス、即チ

$$(7) \quad \Omega = U' \times U' \times U' \times \dots$$

U' ガ *bicomact* デスカラ Ω モ *bicomact* Ω ノ点スツ云フノハ $x = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ $u_i \in U' \quad i=1, 2, \dots$ 今 Ω ノ部分集合デ次ノ如キモノヲ考ヘマス。

$$F_n = \{x = (u_1, u_2, u_3, \dots); u_1 + u_2 + \dots + u_n \in U'_n\}$$

F_n キ0ナルコトハ $U'_n \neq 0$ ト(6)カラ明白デス。 F_n ガ閉集合ナルコトモ容易ニ分リマス。関係式(5)ヲ用フレバ(6)ニ於テ

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} \in U'_{n-1} \quad \text{ナルコトガ分ルヲ}$$

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots \quad \text{トナツテイマス。}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq 0 \quad \text{ニゾクスル一点 } y = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \quad \text{ヲトツテキマス}$$

任意ノ n ニ対シテ $d_1 + d_2 + \dots + d_n \in U'_n$ ナルコトハ明白デスが更ニ関係式(5)ヲ用フレバ任意ノ相異なる自然数ノ係列 $m_1, m_2, \dots, m_r$ ニ対シテ

$$(8) \quad d_{m_1} + d_{m_2} + \dots + d_{m_r} \in U'_r \quad \text{ナルコトガ分リマス。}$$

集合 $\{d_1, d_2, \dots\}$ ニ相等シイモノガ無限ニアレバソノ一ツヲ d トシ然ラザレバ $\{d_1, d_2, \dots\}$ ノ集合点ノ一ツヲ d トスレバ関係式(8)ヨリ $nd \in U'_n$ ガ容易ニ分リマスカラ $nd \in U' \Leftrightarrow n=0$ ナルコトガ容易ニ分リ d ハ求ムルモノトナリマス。

Haar measure ノ両側 *invariant* ナルタメノ條件ニ就テ次ノ結果ヲ得マシテ、以後群ハ凡テ *locally bicomact* ナル

モノト決定シテオキマス。ナホ Haar measure ト云フノハ小平サ
ンニ從ツテ左 - *invariant* ナ測度ヲサスモノトシテオキマス。

【定理 1.】 0-dimensional ナ群ノ Haar measure ハ両側
invariant

【定理 2.】 *eins* , *component* ガ *bicompact* ナ群ノ Haar
measure ハ両側不変。

【定理 3.】 Z ヲ群 G ノ *zentrum* ニ含マレル任意ノ部分群ト
シマス。 G ノ Haar measure ガ両側不変ナルタメ
ノ必要充分條件ハ G/Z ノ Haar measure ガ両側
不変ナルコトデス。

(暫ニ後藤君ガ G ガリー群デ Z ガ *zentrum* ナルトキ G/Z ガ両側不変
ノ Haar measure ヲ持テバ G ノ Haar measure ガ両側不変ナ
ルコトヲリー群ノ定理ヲ用ヒテ証明シマシタガ、実ハ G ガリー群デア
ル必要ハナク、一般ノ群ヲ成立スルコトガ上ノ定理ノ一部分トシテ含
マレテイルワケデス。更ニ G/Z ノ Haar measure ガ両側不変ナル
コトガ G ノ Haar measure ノ両側不変ナルタメノ必要條件デモア
ルワケデス)

【定理 4.】 H ヲ群 G ノ任意ノ *bicompact normal*
subgroup トシマス。 G ノ Haar 測度ガ両側不変
ナルタメノ必要充分條件ハ G/H ノ Haar measure
ガ両側不変ナルコトデス。

(系 1) *bicompact* ナ *normal subgroup* デ割ツタ
群ニ両側不変ノ距離ガ入レバ、モトノ群ノ Haar measure ハ両側
不変デス。

(系 2) *bicompact* ナ *normal subgroup* デ割ツタ群ガ
discrete ナラモトノ群ノ Haar measure ハ両側不変デス。

【定理 5】 D ヲ群 G ノ任意ノ *discrete* ナ *normal*
subgroup トシマス。 G ノ Haar 測度ガ両側不変ナ
ルタメノ必要充分條件ハ G/D ノ Haar measure ガ両

側不変ナルコトデス。

(系) 群 G / *discrete + normal subgroup* D ガアツチ、
 G/D ガ *bicompact* ナラ G / Haar measure ハ両側不変デス
(実ハ定理 3, 4, 5 ヲ一積ニヒツクルメテ更ニ比等ヨリ精密ニ次
ノ定理ガ成立シマスガ、先ヅ定義カラハジメマス)。

定義 1. 群 G / 要素 a ガ G / 任意ノ部分集合 A ニ対シテ aA ,
ト Aa / Haar measure ガ等シトキ、要素 a ノコトヲ、不変要素
ト云フコトニシマス。古ト変ヘレバ右カラカクテヤツテモ measure
ガ変ラナイ要素ノコトデス。 a ガ不変要素ナラ a^{-1} モ不変要素ナルコ
トハ容易。

【定理 6】 群 G / *normal subgroup* N ガアルトシマス。若
シ N ガ (1) G / *zentrum* ニ含まレルカ、或ヒハ (2) *bicompact*
デアルカ、或ヒハ (3) *discrete* デアルカ。

以上イツレカ、場合ニハ G / 任意要素 a ガ不変要素デアルサメノ必
要充分條件ハ a ヲ G/N / 要素ト考ヘタトキ a ガ G/N / 不変要素デアル
コトデス。

(系 1) 群 G / 任意ノ *bicompact + normal subgroup*
ノ *element* ハ凡テ不変要素デス。

(系 2) 群 G / 任意ノ *discrete + normal subgroup* /
element ハ凡テ不変要素デス。

(不変要素ニ就テハ定理 6 / 系 1 ヲ更ニ精密ナコトガ云ヘマス)

定義 2 群 G / 要素 a ガアリ集合 $\{a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots\}$
ガ *totally bounded* ナルトキ要素 a ノコトヲ 有界要素 ト云フ
コトニシマス。

a ガ有界要素ナルトキ a^{-1} ガ有界要素ナルコトハスグ云ヘマス。

【定理 7】 群 G / 要素 a ガ有界要素ナラ a ハ不変要素デス。従
ツテ G / 任意ノ *bicompact subgroup* (*normal* デアル必要ハ
アリマセン) / 要素ハ凡テ不変要素デス。

【定理 8】 群 G / *normal subgroup* N ガアリ、 N /

Haar measure (一般ニ両側不変ナラズ) ト G/N ノ Haar measure (之モ両側不変トハ限ラナイ) カラ G ノ Haar measure ヲ作ルコトが出来マス。

大体ノ ideal ハ次ノヨウデス。 G ノ任意ノ部分集合 A ニ対シテアル方法ガ G/N ノ上デ定義サレタ函数 $f_A(x)$ ヲ対応サセ。 $f_A(x)$ ヲ G/N ノ Haar measure デ積分シタモハ A ノ測度トスルコトニヨリ G ノ Haar measure ガ得ラレマス。集合 $A = f_A(x)$ ヲ対応サセルトキニ N ノ Haar measure ヲ用ヒマス。此ノトキ一番ノ難関ハ A ガ如何ナル集合ノトキ $f_A(x)$ ガ可測ニナルカト云フトコロデスガ、幸ヒ A ガ開集合ナルトキ $f_A(x)$ ガ下半連続ナルコトガ証明サレマス。

最後ノ定理 (定理ト云フノハオカシイデスガ) 8 ガ出発点トナツテ他ノ定理 1 カラ 6 マデハ互ヒニ关联シテイマスガ定理 7 ダケハ之等ト independent デ其ノ証明ハ trivial デス。

定理 4 ノ系 1、逆ガ云ヘタラ面白イト思ヒマス。即チ G ノ Haar measure ガ両側不変ナラ適當ナ *bicompact normal subgroup* N デ G ヲ割レバ G/N ニ両側不変ノ距離ガ入ル。然シコレハドウモアヤシイト思ヒマス。

定理 6 ハモット精密ノコトガ云ヘマス。 α ヲ G ノ任意ノ要素トシタトキ、 G ノ任意ノ部分集合 A ニ対シ $\ell(\alpha) \cdot m^*(A) = m^*(A\alpha)$ ($\ell(\alpha)$ ハ α ニ depend シタ常数) ナル関係ガアリマス。

α ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ之ヲ α^* ト書クコトニシマス。実ハ $\ell(\alpha) = \ell(\alpha^*)$ ナルコトガ云ヘマス。

$\ell(\alpha) = 1$ ナルコトガ α ガ G ノ不変要素ト云フコトデ

$\ell(\alpha^*) = 1$ ナルコトガ α^* ガ G/N ノ不変要素即チ α ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ不変要素ナルコトデスカラ、 $\ell(\alpha) = \ell(\alpha^*)$ ナル関係ハ定理 6 ヲリクワシイト云ヘマス。

群 G ノ *normal subgroup* N ガアタヘラレテイルトシマス。 N ノ任意ノ要素 $\alpha \in N$ ニ対シテ、実数 $\ell(\alpha)$ ガ定マリ、 $m^*(A\alpha) = \ell(\alpha) \cdot m^*(A)$ ガ成立シマス。但シ A ハ N ノ任意ノ部分集合ニシ

μ^* は N の Haar measure デス、 G の Haar measure
 μ^* に対シテモ全様ニ実数 $\ell(a)$ が定マリ、 $\mu^*(Ba) = \ell(a) \cdot \mu^*(B)$
 G の任意ノ部分集合 B に対シテ成立シマス、ソウマルト次ノ定理が
 成立シマス。

【定理 9】 任意ノ $a \in N$ に対シテ $\ell(a) = \ell(a)$

(系 1) 群 G の Haar measure が両側不変ナラ G の任意ノ
 normal subgroup の Haar measure も両側不変デス。

(系 2) 群 G の要素ニシテ右カラ掛ケテヤツテモ Haar
 measure が変ラナイヨウナ要素全体 $H = \{a; \ell(a) = 1\}$ は G
 の normal subgroup ニナツテ両側不変ノ Haar measure
 ヲ持ツヨウナモノハ只 H ニ含マレテシマヒマス。後ツチ G の如何ナル
 bicomact + normal subgroup も又如何ナル
 discrete + normal subgroup H ニ含マレマス。

G の zentrum 及び commutator が H ニ含マレルコトハ
 明白デス。

G の任意ノ bicomact subgroup (必スシモ normal デ
 アル必要ハアリマセン) が H ニ含マレルコトハ定理 7 ニ示サレテイマ
 ス。

定理 9 の系 1 ヲ更ニ精密ニ出来ルカドウカ、例ヘバ G の Haar
 measure が両側不変ナラ G の如何ナル subgroup も両側不変ノ
 Haar measure ヲ有スルヨウナ事が云ヘルカドウカ僕ニハ分リ
 マセン。

又 G が任意ノ normal subgroup N デ割ツタ G/N の Haar
 measure が常ニ両側不変カドウカモ分リマセン。

定理 4 の系 1 の逆、即チ G の Haar measure が両側不変ナラ
 適當ノ bicomact normal subgroup N デ G ヲ割レバ G/N
 ニ両側不変ノ距離が入ルト云フコトガドウモ云ヘソウナ氣モシマス。
 小平サンノ論文ヲ見テ測度ガアタヘラレタトキ位相ヲ導入スルトコロ
 ヲ吟味スレバ測度ノ両側不変性ガアレバ位相ノホウニドウ云フ影響ヲ

アタヘルカガ分ルカモ知してセン。

(系 3) 任意ノ群 G ハ適當ナ *normal subgroup* N ヲ持つ。
テクレバ G/N モ N モ共ニ両側不変ナル *Haar measure*ヲ有スル
ヨウニ出来ル。(實ハ G/N ハ両側不変ナ *Haar measure*ヲ有スル
バカリデナク *abel* 群ニスルコトガ出来マス)

【定理 10】 群 G ノ不変要素全体ノ集合ヲ $H = \{a; \ell(a)=1\}$
トシマス。若シ $\overline{G} > 0$ 。ナラ $\overline{H} > 0$ 。デス。

【定理 11】 H ヲ定理 10ニ於ケル H トシマス。若シ G ガ
connected ナラ $G=H$ カ。サモナケレバ G/H ハ実数ノ群ト
isomorph デス。 (1947. 1. 27 受付)