



Title	全微分方程式ノ積分ニ就テ（Ⅰ）
Author(s)	占部, 実
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(3), p. 37-47
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75165
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

30. 全微分方程式ノ積分ニ就テ (I)

占 部 実 (龍島文理大)

§ 1. 序

Forsyth, Theory of Differential Equations, I,
p. 31—32 = 依レバ,⁽¹⁾

全微分方程式

$$\Omega \equiv Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (1.1)$$

ヲ積分スル *du Bois-Reymond* ノ方法ハ幾何学的ニ述べレバ
次ノ通りデアル。

$\Omega = 0$ が integrable ナル時⁽²⁾, 其ノ integral surface
 S ヲ考ヘ、 S 上ノ一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ヲ通り任意ノ曲面

$\chi(x, y, z) = a$ ($a = \text{const}$) を考へ、是ト S トノ交線 C 上ニ他ニ任意ニ一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ を取ル。 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ を通ル他ノ任意ノ曲面 $Z'(x, y, z) = b$ を考へ、是ト S トノ交線 C 上ニ又任意ニ他ノ一点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ を取ル。然ルトキ C ハ次式ヲ積分シテ得ラル。

$$\Omega = 0, \quad d\chi = 0$$

此積分ハ変数が 2 個ノ場合ニ *reduce* サレル。此積分ヲ $f(x, y, z) = \text{const.}$ トスレバ点 P_1, P_2 ノ座標ノ間ノ次ノ関係式ガ成立スル。

$$\left. \begin{aligned} \chi(x_0, y_0, z_0) &= a = \chi(x_1, y_1, z_1) \\ f(x_0, y_0, z_0, a) &= f(x_1, y_1, z_1, a) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

同様ニ C' ノ方程式ヲ求メ、 P_1, P_2 ノ座標ノ間ニ次ノ関係式ヲ得ル。

$$\left. \begin{aligned} \chi'(x_1, y_1, z_1) &= b = \chi'(x_2, y_2, z_2) \\ f'(x_1, y_1, z_1, b) &= f'(x_2, y_2, z_2, b) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

- (1) *du Bois-Reymond* ノ論文ハ *du Bois-Reymond, Crelle, t. 19 (1869), p. 299-313.* 但シ筆者ハ戦災、ヲメ英論文ヲ参照スルヲ得ナクッタメ、同論文ヲ紹介セル *Forsyth* ノ上記ノ著書ニ依ツタ。

- (2) 全微分方程式ガーツノ *integral equation* ニ依テ満足サレルトキ、其全微分方程式ハ *integrable* ナルトイフ。

(1.2), (1.3) ヨリ x_1, y_1, z_1, a, b を消去スレバ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\Phi(x_0, y_0, z_0; x_2, y_2, z_2) = 0 \quad (1.4)$$

Reymond ハ此式ヲ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナルナラバ (1.4) ハ次ノ形ニナルト假定ヲシテキル。

$$\phi(x_0, y_0, z_0) = \phi(x_2, y_2, z_2) \quad (1.5)$$

然ルトキ (1.5) ハ点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ガ曲線 C 上ヲ動クトキ、点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ノ軌跡ヲアタヘルガ故ニ。此ノ $\phi(x, y, z) = \text{const.}$ ガ求ムル $\Omega = 0$ ノ *integral* ヲアタヘル。以上ガ *Reymond* ノ

方法ノ概要デアル。

本論文デハ先ヅ曲面 $\mathcal{X}=a$, $\mathcal{X}'=b$ ノ満足スベキ條件ヲ求メ (1.2)
(1.3)ニ於テ採用スベキ函数 f, f' ノ性質ヲ規定シ。次デ (1.2), (1.3)
ヨリ $a, b, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$ ヲ消去シテ得ル式 (1.4)ハ $\Omega=0$ ガ
integrable ナル時ハ確カニ (1.5)ノ形トナルコトヲ示ス。次ニ遂
ニニ曲面 $\mathcal{X}=a$, $\mathcal{X}'=b$ ヲ一定條件ヲ満足スル如ク取リ $\Omega=0$
 $d\mathcal{X}=0$ 及び $\Omega=0$, $d\mathcal{X}'=0$ ノ *integral* f, f' ヲ適當ニ選デ
(1.2), (1.3) ヲ作り。是等ヨリ $a, b, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$ ヲ消去スル時。
得ラレタ消去式 (1.4) ガ (1.5)ノ形トナルナラバ $\Omega=0$ ハ
integrable トナリ。其時得ラレタ $\phi(\mathcal{X})=const.$ ガ $\Omega=0$ ノ
integral トナルコトヲ証明スル。

カクテ結論トシテ次ノ結果ヲ得ラレタ。即チ

$\Omega=0$ ガ *integrable* ナルタメノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件
ハ (1.2), (1.3) ヲリ $a, b, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$ ヲ消去シテ得ル式 (1.4)
ガ (1.5)ノ形トナルコトデアル。ソシテ其時得ラレタ (1.5)ノ
 $\phi(\mathcal{X})=const.$ ノ求ムル $\Omega=0$ ノ *integral* デアル。

尚 $\Omega=0$ ガ *integrable* ナル時ハ。上ノ如クシテ求メラレタ
integral $\phi(\mathcal{X})=const.$ ハ途中デ補助ニ用ヒラレタ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ノ
形ニハ無關係デアルコトモ示ス⁽¹⁾。

-
- (1) *Raymond* ノ方法ニ於テ得ラレタ $\phi(\mathcal{X})=const$ ガ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$
ノ形ニ關係アリヤ否ヤノ問題モ解決サレテキナイト *Foroyth* ハ
述ベテキル。 *Foroyth. Theory of Diff. Eqs. I. p. 32.*
-

次ニ此立場ヨリ *Raymond* ノ方法ヲ一般ノ元組ノ変数ノ場合ニ拡張
シ。 *Natani* ノ方法。 *Mayer* ノ方法ハ。 *Raymond* ノ方法ニ於
テ上ノ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ トシテ特別ノモノヲ選デ場合ニ違ギヌコトヲ示シ⁽¹⁾。従
來統一サレテキナカツタ是等ノ方法ヲ *Raymond* ノ立場カラ新シ
ク統一シタ。又積分條件ガ *explicit* ニアラハレテキナイ *Natani*

1 方法. Mayer 1 方法等ニ於テ其ガ何處ニ如何ナル形デアラハレル
カモ Raymond 1 立場カラ明ラカニスルコトヲ得タ。最後ニ Ray-
mond 1 方法ヲ最も一般ナル場合、即チ任意数ノ変数ヲ有スル

completely integrable ナ全微分方程式ノ系ニ迄拡張スル。此
場合ニ於テモ Raymond 1 方法、Natani 1 方法、Mayer 1 方
法ニ対スル関係ハ全ク同様デアル。但シ其関係ノ証明ハーツノ全微分
方程式ノ場合ト全ク同様デアルカラ省略シタ。

§2. χ, χ' ノ満足スベキ條件.

(1.1) ガ *integrable* デアルトシテ、其任意ノ一ノ *integral*
ヲ $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ トスル。然ルトキ $\varphi(x, y, z)$ ニ対スル
integrating factor ヲ入トスレバ、次ノ関係式ヲ得ル。

$$\lambda X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \lambda Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2.1)$$

曲面 $\chi = a$ ヲ取ルトキ、若シモ次式ガ成立シテキナラバ

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} : \frac{\partial \chi}{\partial y} : \frac{\partial \chi}{\partial z} = X : Y : Z \quad (2.2)$$

(2.1) ト比較シテ $\varphi = F(\chi)$ トナリ *integral surface* $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ ト $\chi = \text{const.}$ トハ一致スル。依テ此場合ニハ *integral surface* S ト $\chi = a$ トナリハ曲線デナクナル。然シ此場合ニハ

(2.2) ヨリ明ラカナル如ク $\chi = \text{const.}$ ガ直チニ成ムル $\Omega = 0$ 1
integral トナル。同様ニ $\chi' = \text{const.}$ ニ就テ

$$\frac{\partial \chi'}{\partial x} : \frac{\partial \chi'}{\partial y} : \frac{\partial \chi'}{\partial z} = X : Y : Z \quad (2.3)$$

ガ成立スルトキハ $\chi' = \text{const.}$ ガ直チニ $\Omega = 0$ 1 *integral*
トナル。依テ我々ハ以下ニ於テハ (2.2) 及ビ (2.3) ガ成立スル場合
ヲ除外シテ論スル。

0) Raymond 1 方法ト Euler, Bertrand, Natani 1
方法トノ関係ハ Raymond, Math. Ann. Bd. 12 (1877).

S. 123-131 ニアル。尚 Raymond ノ方法ノ其他ノ批判ハ Weiler, *Schlöm. Zeitschr. Bd. 20 (1875), S. 80-83*, ニアル。但シ 筆者ハ戦災ノタメ Weiler ノ論文ハ参照スルコトガ出来ナカツタ。

次ギニ 次式ヲ定義サレル行列式 Δ ガ 0 ナル場合ニツキ考察スル。

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi'}{\partial x} & \frac{\partial \chi'}{\partial y} & \frac{\partial \chi'}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

$\Delta = 0$ ナラバ $\Omega = 0$, integral surface $\varphi = \text{const.}$
上ノ同一点 $P(x, y, z)$ ヲ通ル曲線 C, C' ハ一致スル。何ト
ナレバ C ノ line element dx, dy, dz ハ次式ヲ決定サレ、

$$\left. \begin{aligned} \Omega &\equiv Xdx + Ydy + Zdz = 0 \\ d\chi &\equiv \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

C' ノ line element $\delta x, \delta y, \delta z$ ハ次式ヲ決定サレル。

$$\left. \begin{aligned} \Omega &\equiv X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \\ d\chi' &\equiv \frac{\partial \chi'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \chi'}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \chi'}{\partial z} \delta z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

然ルニ (2.2), (2.3) ガ成立シナイカラ $dx:dy:dz$ 及ビ
 $\delta x:\delta y:\delta z$ ハ夫々 (2.5) 及ビ (2.6) ヨリ unique ニ定
マレ次ノ如クナル。

$$\left. \begin{aligned} dx:dy:dz &= \begin{vmatrix} Y & Z \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Z & X \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} & \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X & Y \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} \\ \delta x:\delta y:\delta z &= \begin{vmatrix} Y & Z \\ \frac{\partial \chi'}{\partial y} & \frac{\partial \chi'}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Z & X \\ \frac{\partial \chi'}{\partial z} & \frac{\partial \chi'}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X & Y \\ \frac{\partial \chi'}{\partial x} & \frac{\partial \chi'}{\partial y} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

サテ $\Delta = 0$ ニシテ且ツ (2.2) が成立シナイカラ次式ヲ満足スル α, β が存在スル。

$$\frac{\partial \chi'}{\partial x} = \alpha X + \beta \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial y} = \alpha Y + \beta \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial z} = \alpha Z + \beta \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (2.8)$$

且ツ (2.3) が成立シナイカラ $\beta \neq 0$. 是ヲ (2.7)ノ $\delta x : \delta y : \delta z$ ノ右辺ニ代入スレバ $dx : dy : dz$ ト比較シテ

$$dx : dy : dz = \delta x : \delta y : \delta z$$

ニ曲線 C, C' ハ同一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ヲ通ル故. C, C' ハ一致スル. 然ルトキ幾何学的ニ考ヘテ. (1.2). (1.3) ヨリ a, b, x, y, z ヲ消去シ得ル式ハ曲面ヲアラハサズシテ. C, C' ノ一致セル一曲線 K ヲアラハス. 即チ *integral surface* 上ノ曲線ノ方程式ヲ得テ. *integral surface* ノ方程式ハ得ラレナイコトニナル.

サテ (2.5) ノ *integral* ヲ $f = \text{const.}$ トスルノデアルガ. 若シ f ガ χ = 独立デナイトスルト $f = \text{const.}$ ト $\chi = \text{const.}$ トハ一致シ $f = \text{const.}$ $\chi = \text{const.}$ ハ單ニ曲面 $\chi = \text{const.}$ ヲアラハシ. 曲線 C ヲアラハサナフナル. 然ルトキ (1.2) ハ点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ヲ曲線 C 上ニ取ツタ事ヲアラハサナフナル. 換言セバ (1.2) ヲ満足スル如キ点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ハ曲面 $\chi = a$ 上ノ任意ノ点ヲアラハシ. 必スシモ曲線 C 上ノ点デナフナル. 是ハ点 P_1 ヲ曲線 C 上ニ取ルトイフ假定ニ反スル. 依テ f トシテハ χ = 独立ナモノヲ取ラネバナラヌ. 而シテ (2.2) が成立シナイカラ (2.5) ハニツノ独立解ヲ有シ. 一ツハ $\chi = \text{const.}$ デアルカラ χ = 独立ナモノウ一ツノ *integral* が必ず存在スル. 依テ (2.5) ノ *integral* ノ中 χ = 独立ナモノヲ取り. 是ヲ f トスルコトニスル. f' = ツイテモ同様デアルカラ. (2.6) *integral* ノ中 χ' = 独立ナモノヲ f' トスル.

カクテ *Raymond* ノ方法ニヨリ $\Omega = C$ ノ *integral* ヲ求ムルタメニハ $\Delta \neq 0$ ナル如キ χ, χ' ヲ選ビ. (2.5). (2.6) ノ *integral* トシテハ夫々 χ, χ' = 独立ナモノヲ取ラネバナラヌコトニナル. 依テ (2.2) 又ハ (2.3) が成立スル場合ヲ除イテ *Raymond* ノ方法ガ

可能ナルタメニハ次ノ條件ヲ満足サレテキルコトガ必要デアル。

$$[\text{条件}\Delta] \quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi'}{\partial x} & \frac{\partial \chi'}{\partial y} & \frac{\partial \chi'}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta=0$ ナル時ニ於テモ (2.2) ヌハ (2.3)ガ成立スレバ $\chi = \text{const.}$ スハ $\chi' = \text{const.}$ ガ $\Omega=0$ ノ *integral* トナリ、*integral* ハ求メラレル。上ニ $\Delta \neq 0$ ト云ツタノハ $\Omega=0$ ガ *Reymond*ノ方法ニ依テ解キ得ルタメノ條件ヲ云ツテキルノデ、如何ナル他ノ方法ニ依テモ $\Delta=0$ ナル時ハ $\Omega=0$ ヲ解キ得ナイト云ツテキルノデハナイ。

次節ニ於テ條件 Δ ハ *Reymond*ノ方法ガ可能ナルタメノ十分條件デモアルコトヲ示ス。以下條件 Δ ガ満足サレテキルトシテ議論ヲ進メル、條件 Δ ガ満足サレテキル時ハ、(2.2) 及ビ (2.3)ノ成立セザルコトハ明ラカデアル。

§3. 消去式ノ分解

(1.2)ノ $f(x, y, z, u)$ ハ (2.5)ノ *integral* デアル。而シテ (2.5)ハ $\Delta \neq 0$ ヨリ (2.2)ガ成立シナイカラ互ニ *linearly independent* ナ方程式デニツノ独立解ヲ有スル。 $\Omega=0$ ガ *integrable* デアル時、其任意ノ *integral* ヲ $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ トスレバ (2.1)ガ成立スル、故ニ (2.5)ハ $\varphi = \text{const.}$ $\chi = \text{const.}$ ナルニツノ *integral* ヲ有シ、而モ此ノ φ, χ ハ互ニ独立デアル。何トナレバ独立デナケレバ (2.1)ヨリ (2.2)ガ成立シ $\Delta \neq 0$ ニ矛盾スル。然ルトキ (2.5)ノ *integral* ナハ次ノ形デアラネバナラヌ。

$$f = f(\varphi, \chi) = f(\varphi, u) \quad (3.1)$$

然モ f ハ χ ニ独立ナル如ク選バレテキルノデアルカラ

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0 \quad (3.2)$$

然ルトキ (1.2) ハ次ノ如ク書キナホサレル。

$$\left. \begin{aligned} \chi(x_0, y_0, z_0) &= a = \chi(x_1, y_1, z_1) \\ f(\varphi(x_0, y_0, z_0), a) &= f(\varphi(x_1, y_1, z_1), a) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\text{同様ニ} \quad f' = f'(\varphi, \chi') = f'(\varphi, b), \quad \frac{\partial f'}{\partial \varphi} \neq 0 \quad (3.4)$$

故ニ (1.3) ハ次ノ如ク書キナホサレル。

$$\left. \begin{aligned} \chi'(x_1, y_1, z_1) &= b = \chi'(x_2, y_2, z_2) \\ f'(\varphi(x_1, y_1, z_1), b) &= f'(\varphi(x_2, y_2, z_2), b) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

(3.3), (3.5) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去スルコトハ、次式ヨリ x_1, y_1, z_1 ヲ消去スルコトデアル。

$$\chi(x_1, y_1, z_1) - \chi(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$f(\varphi(x_1, y_1, z_1), \chi(x_0, y_0, z_0)) - f(\varphi(x_0, y_0, z_0), \chi(x_0, y_0, z_0)) = 0$$

$$\chi'(x_1, y_1, z_1) - \chi'(x_2, y_2, z_2) = 0$$

$$f'(\varphi(x_1, y_1, z_1), \chi'(x_2, y_2, z_2)) - f'(\varphi(x_2, y_2, z_2), \chi'(x_1, y_1, z_1)) = 0$$

据此左辺ノ式ノ x_1, y_1, z_1 ニ關スル *Jacobian matrix* J ヲ作
レバ、(2.1) 及ビ $\lambda \neq 0, \frac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0, \frac{\partial f'}{\partial \varphi} \neq 0$ ニ依リ其 *rank* ハ
行列式 Δ ノ *rank* ト等シナル。然ルニ今ノ場合 $\Delta \neq 0$ ナル故 $\rho(J)$
= 3 トナル。依テ (3.6) ヨリ x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得ル式ハ

algebraic equivalence ヲ除イテハ高々一ツトナル。即チ

(3.3), (3.5) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得ル式ハ *algebraic equivalence* ヲ除イテハ高々一ツトナル。

又 (3.3) ノ後者ヨリ $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0$ ニ依リ $\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_1, y_1, z_1)$ 。同様ニ (3.5) ヨリ $\varphi(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x_2, y_2, z_2)$ 。故
ニ次式ヲ得ル。

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_2, y_2, z_2) \quad (3.7)$$

依テ (3.3), (3.4) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去セル式ハ (3.7)
= *algebraically equivalent* ニナル。カクテ次ノ結果ヲ得

ル。(1.2), (1.3) ヨリ a, b, x, y, z ヲ消去セル式 (1.4) ハ是ニ適當ナ代数的変形ヲホドコセバ $\Omega=0$ ノ任意ノ *integral* ト $\phi(x, y, z)$ ヲ用ヒテ必ず (3.7) ノ形ニ帰着セシメルコトガ出来ル。即チ (1.5) ノ形ニ必ず帰着セシメラレル。

又上ノコトヨリ條件 Δ ガ成立シテキルトキハ $\Omega=0$ ノ *integral* $\phi(x, y, z) = \text{const.}$ ガ常ニ求メラレルガ故ニ、條件 Δ ハ *Raymond* ノ方法ガ可能ナルタメノ十分條件デアルコトハ明ラカデアル。

§4. 消去式ガ分解スルタメノ條件

本節ニ於テハ (2.5), (2.6) ノ夫々 x, x' ニ独立ナ *integral* f, f' ヲ用ヒテ (1.2), (1.3) ヲ作り、是等ヨリ a, b, x, y, z ヲ消去シテ得ル式 (1.4) ガ (1.5) ノ形トナル時ハ、 $\Omega=0$ ガ *integrable* トナリ其時得ラレタ $\phi(x, y, z) = \text{const.}$ ガ $\Omega=0$ ノ *integral* トナルコトヲ証明スル。

(1.3)ニ於テ $x_2 = x, y_2 = y, z_2 = z$ トオイテモ (1.3) ハ成立スル。故ニ (1.5)ニ於テ $x_2 = x, y_2 = y, z_2 = z$ トオイテモ (1.5) ハ成立スル、即チ (1.5) ヨリ

$$\phi(x_0, y_0, z_0) = \phi(x, y, z) = \phi(x_2, y_2, z_2) \quad (4.1)$$

而シテ点 $(x, y, z), (x_2, y_2, z_2)$ ハ夫々 (2.5), (2.6) ノアラハス曲線上ノ任意ノ点デアルカラ (4.1) ヨリ $\phi(x, y, z)$ ハ (2.5) (2.6) ノアラハス曲線上ニ於テ *constant* トナル。即チ $\phi(x, y, z)$ ハ (2.5) ヲ満足スル dx, dy, dz ニ對シテ

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta \neq 0$ ヨリ (2.2) ガ成立シナイカラ次式ヲ満足スル如キ p, q ガ存在スル、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = pX + \tau \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = pY + \tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = pZ + \tau \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (4.2)$$

同様ニ $\phi(x, y, z)$ が (2.6) ノアテハス曲線上ニ於テ一定デアルコトカラ次式ヲ満足スル如キ p', τ' 存在スル。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = p'X + \tau' \frac{\partial \chi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = p'Y + \tau' \frac{\partial \chi'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = p'Z + \tau' \frac{\partial \chi'}{\partial z} \quad (4.3)$$

(4.2), (4.3) ヲ比較シテ

$$(p - p')X + \tau \frac{\partial \chi}{\partial x} - \tau' \frac{\partial \chi'}{\partial x} = 0$$

$$(p - p')Y + \tau \frac{\partial \chi}{\partial y} - \tau' \frac{\partial \chi'}{\partial y} = 0$$

$$(p - p')Z + \tau \frac{\partial \chi}{\partial z} - \tau' \frac{\partial \chi'}{\partial z} = 0$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow p = p', \tau = \tau' = 0$ 故ニ (4.2), (4.3) ヨリ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = pX, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = pY, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = pZ.$$

i. e. $\Omega = 0$ ハ *integrable* トナリ、 $\phi(x, y, z) = \text{const.}$ ガソノ *integral* トナル。

カクテ今マデノ所論ヲ綜合シテ次ノ結果ガ得ラレル。即チ

Raymond ノ方法ニヨツテ $\Omega = 0$ ヲ解クコトガ可能デアルタメノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ、(2.2) 若ハ (2.3) ガ成立スル場合ヲ除外スレバ、 χ, χ' ガ $\Delta \neq 0$ ヲ満足スルコトデアル。 χ, χ' ガ $\Delta \neq 0$ ナル如クエラバレタ時ハ、(2.5), (2.6) ノ *integral* f, f' ヲ夫々 z, z' ニ独立ナル如ク取ル時、 $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナルタメノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ (1.2), (1.3) ヨリ a. b. x, y, z ヲ消去セル式 (1.4) ガ (1.5) ノ形トナルコトデアル。ソレデ此時解ラレタ $\phi(x, y, z) = \text{const.}$ ガ $\Omega = 0$ ノ *integral* トナル。

カクテ *integrable* ナ方程式 $\Omega = 0$ ノ *integral* ヲ求ムルニハ (1.4) ヲ (1.5) ノ形ニ変形シ、得ラレタ $\phi(x, y, z)$ ヨリ $\phi(x,$

$y, z) = \text{const.}$ ヲ作レバ是ガ求ムル $\Omega=0$ の *integral* ヲアタヘル。

§ 5. χ, χ' の *integral* = 及ボス影響

本節ニ於テハ $\Omega=0$ の *integral* ヲ求ムルタメ途中デ補助ニ用ヒタ χ, χ' ハ上述ノ方法デ求メラレタ $\Omega=0$ の *integral* = ハ何等本質的影響ヲ与ヘナイコトヲ説明スル。

(1.2), (1.3) ハ $\Omega=0$ ガ *integrable* ナル時ハ (3.3), (3.5) ノ形トナル。扱 $\varphi(\chi, y, z)$ ハ $\chi, \chi' =$ 全ク無関係ニ任意ニ選ビ $\Omega=0$ の *integral* デアル。依テ (3.3), (3.5) ヨリ a, b, z, y, z ヲ消去シテ得タ式 (3.7) ニ於テハ是ガ $\chi, \chi' =$ 無関係ナルコトハ余リニモ自明デアル。然シナガラ $\Omega=0$ ガアタヘラレ、其 *integral* ヲ求メントスル時ハ (3.3), (3.5) ノ $f = f'(\varphi, a)$, $f' = f'(\varphi, b)$ ノ形ハ分ラナイ。唯分ルノハ (1.2), (1.3) ノ形デアル。依テ此時是等ヨリ a, b, χ, y, z ヲ消去シタ結果ノ式ニ於テハ途中デ χ, χ' ヲ用ヒテキルノデアルカラ其等ノ影響ガ残ルノガ一般デアル。然シソレハ § 3 デ論ジタ如ク $\chi, \chi' =$ 無関係ナ $\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_2, y_2, z_2) = \text{algebraically equivalent}$ ニナルノデアルカラ、消去式ハ *algebraic equivalence* ヲ除イテハ、 $\chi, \chi' =$ 無関係デアリ。従テ其等ニ適當ナ代数的変形ヲホドコスコトニヨリ $\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_2, y_2, z_2) =$ 隔着セシメ、 χ, χ' ノ影響ヲ全ク取除クコトガ出来ル。コノ意味ニ於テ *Raymond* ノ方法ニヨツテ求メラレタ *integral* $\phi(x, y, z) = \text{const.}$ ハ $\chi, \chi' =$ 無関係デアル。

カクテ $\Omega=0$ ヲ積分スルタメニ取ルベキ χ, χ' ハ Δ キロヲ満足シテキル限り全ク任意デアル。依テ實際ニ方程式ヲ解ク場合ニハ Δ キロナル如キ最も簡單ナル函数ヲエラビ、其ニ依テ $\Omega=0$ ノ積分ヲ求メレバヨイコトニナル。

× 上