OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	有限次元modular束ニ於ケル Remak-Schmidtノ定理ニツイテ
Author(s)	永尾, 汎
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(4), p. 49-59
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75166
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

31. 有限次元 modular 束ニ於ケル Remak-Schmidt 定理ニツイテ

(阪大) 永尾 汎

ココデ群ノ直積分解ニ関スル Fitting ノ方法ヲ有限次元 modular 束ニ移シテ考ヘテミタイト思ヒマス。即チ束ニ Endmorphismus 及 normal ナ Endmorphismus ナル概念ヲ定義シテ ソレト束ノ元ノ直和分解トノ関係ヲ考察スレバ所謂 Remak-Schmidt ノ定理並及其元ノ二ツノ直和分解ノ共通ノ Verfeinerung ガ存在スルタメノ完全條件(定理11)ハ群ニ於ケル結果ヲ殆ンドソノマヽ束ニ移シテ得ラレマス。シカシ Math. Zeit. Band 39, Heft 1 (1934) ニ於ケル Fitting ノ論文ノ Satz 4 及同上 Band 41, Heft 3 (1936) ニ於ケル Satz 3 ニ相當スル定理ハ束ノ場合ニハ定理12, 13 ノ形デ表ハサレ、群ニ於ケル結果ヲソノマヽ移ス事ガ出来マセンデシタ。コレ群特有ノ性質ガ本質的ニキイテキテオル様ニ思ハレマス。

[定義1] Lヲ有限ニ次元 modular 束トスルトキ、Lノ join ヲ保存スルソノ中ヘノ Homomorphismus デ最小元0ニハ0ガ對応スルモノヲ Lノ "Endmorphismus" ト呼ブ事ニスル。

[定義2] L, L' ガ共ニ有限次元 modular 束デLカラL'ノ或 Ideal [0, a'] ノ上ヘノ joins ヲ保存スル Homomorphismus θ ガ次ノ條件ヲ充タストスル。即チLノ元 a_θ ガ存在シテ、θナル關係デ $[a_\theta, 1] \sim [0, a']$ デアル。コノトキ、θヲLカラL'ノ中ハノ "normal + Homomorphismus" デアルト定義スル。

時ニLカラL自身ノ中ヘノ normal + Homomorphismus ヲLノ "normal + Endmorphismus" ト定義スル。

又上ノ a_θ ヲθニ對應スル元ト呼ブ事ニスル。

以上ノ定義カラスグニ出ル二三ノ定理ニツイテ述ベレバ

[定理1] （θヲーツノ写像トスルトキ、χノθニ由ル像ヲ以後 χ·θ デ表ハス事ニスル）

θヲLカラL'ノ中ヘノ normal + Homomorphismus トシ、θ=対応スルLノ元ヲa_θトスレバ Lノ元χニ対シ χ·θ=0 ナルタメノ完全條件ハ χ≦a_θ ナル事デアル。又任意ノLノ元χニ対シ、χ·θ=(χ∪a_θ)·θ ガ成立スル。

（証明）（χ∪a_θ)·θ=χ·θ∪a_θ·θ

コノデ定義ヨリa_θ·θ=0 カスグ出ル故 結局 χθ=(χ∪a_θ)θ デアル。

次ニ χ·θ=0 ニ(χ∪a_θ)·θ=0 ニ χ∪a_θ=a_θ 即チ、定理ノ前半ノ主張ガイヘタ。

[定理2] θ_1, θ_2ヲLノニツノ Endmorphismus トスレバ χ·($\theta_1+\theta_2$)=χθ_1∪χθ_2 ニ由リ定義サレル写像 $\theta+\theta_2$ ヌLノ Endmorphismus デアル。

（証明）(χ∪y)·($\theta_1+\theta_2$)=(χ∪y)·θ_1∪(χ∪y)·θ_2 ニ

χ·θ_1∪y·θ_1∪χ·θ_2∪y·θ_2 = χ·($\theta_1+\theta_2$)∪y·($\theta_1+\theta_2$

[定理3] θ_1, θ_2ヲ夫々LカラL1ノ中 L1カラL2ノ中ヘノ normal + Homomorphismus トスレバ、θ_1 θ_2 ハ2カラL2ノ中ヘノ normal + Homomorphismus デアル。（コヽデ θ_1, θ_2 ト書イタノハ写像トシテノ積ノ意味デアル。

（証明）θ_1ニ由リLハL1ノ Ideal [0, b] ノ上ヘ写像サレ且 θ_1 ニ対応スルLノ元ヲa_{θ_1}トスル。

又 θ_2 ニ由リL1 L2ノ Ideal [0, c] ノ上ヘ写像サレ且 θ_2 ニ対応スルL1ノ元ヲ b·θ_2 トスル。

θ_1ニ由リ[a_{θ_1}, i] ≃ [0, b], θ_2 ニ由リ[bθ_1, 1] ≃ [0, c] デアル。

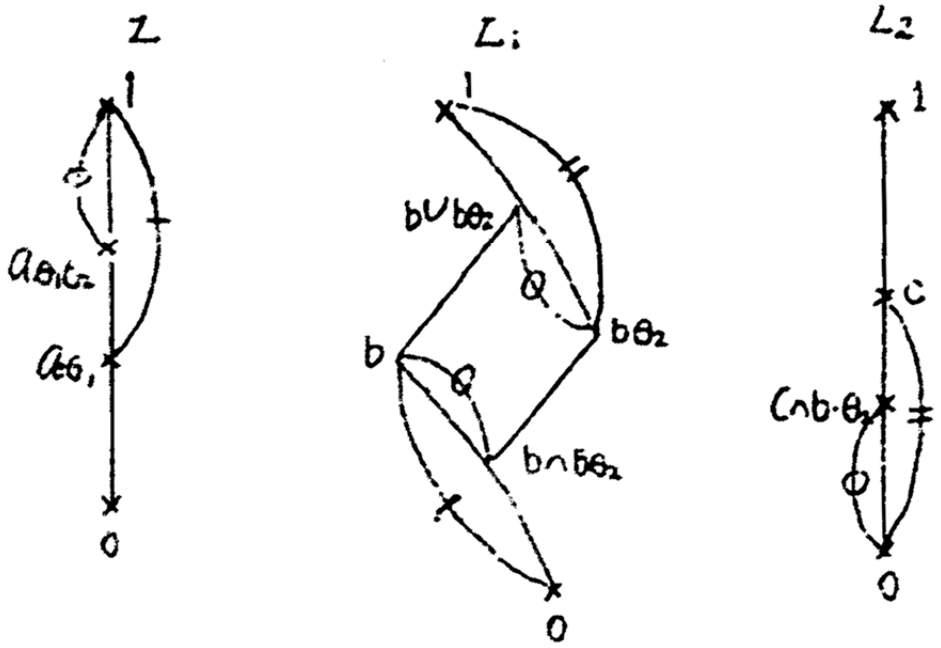
θ_2ニ由リ[0, b]カラ[0, c∧b·θ_2]ノ上ヘノ normal + Homomorphismus ガ与ヘラレ、且コノ対応デ

[b∧b$_{\theta_2}$ b] ≃ [0, c∧b·θ_2] デアル。

故ニ $[a\theta_1, 1]$ ト $[0, b]$ ノ間ノ Isomorphismus ニ於テ $b \wedge b\theta_1$ ニ對應スル $[a\theta_1, 1]$ ノ元ヲ $a\theta_1\theta_2$ トスレバ $\theta_1 \cdot \theta_2$ ニ由リ L ハ L_2 ノ Ideal $[0, c \wedge b\cdot\theta_2]$ ノ上ニ join ヲ保存シテ寫像サレ、且コノ對應デ

$$[a_{\theta_1\theta_2}, 1] \simeq [0, c \wedge b \cdot \theta_2]$$ デアル.

以上ノ証明ヲ圖ニ由ツテ示セバ次ノ樣ニナル。



以上ヨリ L ノ Endmorphismus 全体ヲ考ヘ.

$$\chi\cdot(\theta_1+\theta_2) = \chi\theta_1 \cup \chi\theta_2, \quad \chi\cdot\theta_1\theta_2 = (\chi\cdot\theta_1)\theta_2$$ ト

和及積ヲ定義スレバコレラハヌ L ノ Endmorphismus デアル。明ニ分配律ガ成立スル。

$$\because \quad \chi\cdot(\theta_1+\theta_2)\theta_3 = (\chi\theta_1 \cup \chi\theta_2)\theta_3 = \chi\theta_1\theta_3 \cup \chi\theta_2\theta_3 = \chi(\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_3)$$

次ニ有限次元 modular 束ノ元ノ直和分解ニ關スル定理ヲ述ベル。以後 束ハ常ニ有限次元 modular 束トスル。

Endmorphismus ヲ End., normal + End. ヲ n. End. ノ normal + Idomorphismus ヲ n. Homo ト略シテ書ク事ニスル。

[定理4] 束 L ノ元 a ノ直和分解

$$a = b_1 \cup b_2 \cup \quad \cup b_r$$

ニ對シ $\chi\cdot\beta_i = b_i \wedge (\chi \cup \bar{b}_i)$ $\bar{b}_i = b_1 \cup \cdots \cup b_{i-1} \cup$

$b_{i+1} \cup \cdots \cup b_r$ ：＝由リ定義サレル写像 β_i ハ次ノ三条件ヲ充タス。

$$\begin{cases} (1)\ \beta_i \ (i=1,2,\cdots,r) \text{ ハ } [0,a] \text{ ノ } n.\,End. \text{ デアル。} \\ (2)\ b_i \beta_j = \beta_i \quad : i=j \text{ ナルトキ} \\ \qquad\qquad = 0 \quad : i \neq j \text{ ナルトキ} \\ (3)\ a(\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_r)=a \end{cases}$$

逆ニコノ三条件ヲ充タス様ナ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ ガアレバ

$$a = a\beta_1 \vee a\beta_2 \vee \cdots \vee a\beta_r$$

ナル a ノ直和分解ガ存在シ．且 β_i ハコノ直和分解ニ関シテ上ノ様ニシテ得タ $[0,a]$ ノ $n.\,End$ デアル。

［定理 4′］　$[0,a]$ ノソノ中ヘノ写像 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ ガ次ノ条件

$$\begin{cases} (1)\ \beta_i \ (i=1,2,\cdots,r) \text{ ハ } [0,a] \text{ ノ } n.\,End. \text{ デアル。} \\ (2)\ a\cdot\beta_i\beta_j = a\beta_i \quad : i=j \text{ ナルトキ} \\ \qquad\qquad = 0 \quad : i \neq j \text{ ナルトキ} \\ (3)\ a(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r)=a \end{cases}$$

ヲ充タセバ　$a = a\beta_1 \vee a\beta_2 \vee \cdots \vee a\beta_r$ ハ直和分解デアル。

コノ二定理ヲ一緒ニ証明スル。

［證明］

I．定理 4 ノ前半

(1)　$a = b_i \vee \bar{b}_i$ ，$b_i \wedge \bar{b}_i = 0$ ナル故 $x \to x \wedge b_i$ ナル對應ニ由リ $[\bar{b}_i, a] \simeq [0, b_i]$ デアル。

コノデ $x \in [\bar{b}_i, a]$ ナラバ $x\cdot\beta_i = b_i \wedge (x \vee \bar{b}_i) = x \wedge b_i$ ナル故上ノ Isomorphismus ハ β_i ニ由リ引キオコサレル。

故ニ β_i ハ a ノ $n.\,End.$ デアル。

(2)　$x \in [0, b_i]$ ナルトキ，$x = b_i \wedge (x \vee \bar{b}_i) = x\cdot\beta_i$

ナル故．$\beta_i^2 = \beta_i$ ハ明デアル。

又 $i \neq j$ ナレバ　$x\cdot\beta_i$ ≦ $\bar{b}_i$ ナル故　$x\cdot\beta_i\beta_j = 0$

(3) $a\cdot\beta_i = b_i$ ナル故明デアル。

II．定理 4 ノ後半及定理 4′

(1)，(2′)，(3)ヲ β_i ガ満足スルトスル

$a\cdot\beta_i = b_i$ トスレバ β_i カ(3)ヲ充タス事ニ由リ

$a = b_1' \cup b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ デアル。

$\overline{b_i'} = b_1' \cup \cdots\cdots \cup b_{i-1} \cup b_{i+1} \cup \cdots\cdots \cup b_r$ トスル。

$\overline{b_i'}\cdot\beta_i = a\cdot(\beta_1 + \cdots\cdots \beta_{i-1} + \beta_{i+1} + \cdots\cdots \beta_r)\cdot\beta_i = 0$

今元 χ ノ次元ヲ $d(\chi)$ デ示ス事ニスレバ.

$d(a) \leqq d(b_1') + d(\overline{b_i'})$

一方 β_i ニ對応スル元ヲ $a\beta_1$ トスレバ $\overline{b_i'} \leqq a\beta_1$

$\therefore d(a) = d(a/a\beta_1) + d(a\beta_1/\overline{b_i'}) + d(\overline{b_i'})$

$[0, b_i'] = [0, a\cdot\beta_1] \simeq [a\beta_1, a]$ ナル故 $d(b_i') = d(a/a\beta_1)$

$\therefore d(a) = d(b_i') + d(\overline{b_i'})$

且 $a\beta_1 = \overline{b_1'}$ デアル。

β_2 ハ $\overline{b_1'}$ ノ n. End ヲヒキオコス故 Induktion ニ由リ $d(a) = d(b_1') + d(b_2') + \cdots\cdots + d(b_r)$ ヲ得ル。

即チ $b_1, \cdots\cdots, b_r$ ハ獨立デアル。

故ニ $a = a\beta_1 \cup \cdots\cdots \cup a\beta_r$ ハ直和分解デアル。

即チ定理4ヲ得タ。

β_i ガ更ニ(1), (2), (3)ヲ充タストスレバ、勿論(2')ハ充タス故、$a = a\beta_1 \cup \cdots\cdots \cup a\beta_r$ ガ直和分解ナル事ハヨイ。

故ニ $\chi\cdot\beta_i = b_i' \wedge (\chi \cup \overline{b_i'})$ ナル事ヲ証明スレバ定理4ノ後半ハ証明サレル。

上ニ於テ $a\beta_1 = \overline{b_1'}$ ヲ結論シタト同様ノ方法ニヨリ $a\beta_i = \overline{b_i}$ ガイヘル。

故ニ β_i ナル対応ガ $[0, b_i'] \simeq [\overline{b_i}, a]$ デアル。

$(\chi \cup \overline{b_i})\cdot\beta_i = (\chi\cdot\beta_i \cup \overline{b_i})\cdot\beta_i = \chi\cdot\beta_i$ ((2)ニ由ル) ナル故

$\chi \cup b_i = \chi\cdot\beta_i \cup \overline{b_i}$ デアル。

$\chi\cdot\beta_i \in [0, b_i]$ ナル故

$\chi\cdot\beta_i = (\chi\cdot\beta_i \cup \overline{b_i}) \cap b_i' = (\chi \cup \overline{b_i}) \wedge b_i'$

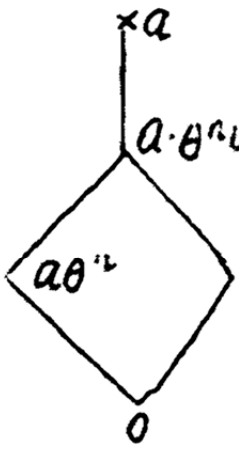
即チ求メル結論ヲ得タ。 [証終]

[定理3.] $a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ヲ直和分解トシ、β_i ヲ $\chi\cdot\beta_i = b_i \wedge (\chi \cup \overline{b_i})$ ニ由リ各ヘラレル n. End. トスルトキ、$\beta_1, \cdots\cdots, \beta_r$ ヲコノ直和分解ニ対応スル End. トイフ。

$a = a\cdot\theta^n \cup a\theta_n$ ナル直和分解ガ得ラレル。

[証明] θ_n ハ $[0, a\cdot\theta^n]$ ノ n. End. ヲ與ヘ且ソノ n. End. ニ対応スル元ハ $a\cdot\theta_n$ ハ $a\theta_n$ デアル。

仮定ニ由リ $a\cdot\theta^n . \theta^n = a\theta^n$ ナル故、次元ヲ考ヘレバ $a\cdot\theta^n \cap a\theta_n = 0$ ヲ得ル。



$$d(a) = d(a/a\cdot\theta^n \cup a\theta_n) + d(a\theta^n \cup a\theta_n / a\cdot\theta^n) + d(a\cdot\theta^n) = d(a/a\theta_n) + d(a\theta_n)$$

コヽデ $d(a/a\theta_n) = d(a\cdot\theta^n)$

$$d(a\theta_n) = d(a\theta^n \cup a\theta_n / a\cdot\theta^n)$$

$\therefore\ a = a\cdot\theta^n \cup a\theta_n$ ヲ得ル。

且上デ $a\cdot\theta^n$ ハ $a\theta_n = 0$ ガイヘテヰルカラコレハ直和分解デアル。 (証終)

[定理6] a ガ直既約デアレバ、$a\theta = a$ デアルカ、又ハ十分大キナ n ニ対シ $a\cdot\theta^n = 0$ トナルカ何レカデアル。

[証明] 定理5ニ由リ $a\theta \neq a$ ナレバ、

$a > a\theta > \cdots > a\theta^n = a\theta^{n+1} = \cdots\cdots$ トスレバ

$a = a\cdot\theta^n \cup a\theta_n$ ハ直和分解デアル。故ニコノトキハ a ガ直既約ナル事ニ由リ $a\cdot\theta^n = 0$ トナル。

[定理7] $[0, a]$ カラ $[0, b]$ ノ上ヘノ n. Homo. ガ存在スルトキ $a \sim b$ ト書ク事ニスル。

θ_1 デ $a \sim b$, θ_2 デ $b \sim c$, $\theta_1\theta_2$ デ $a \simeq c$ トスレバ $a \simeq b \simeq c$ デアル。

[証明] θ_1 ニ対応スル $[0, a]$ ノ元ヲ $a\theta_1$, θ_2 ニ対応スル $[0, b]$ ノ元ヲ $b\theta_2$ トスレバ $\theta_1\theta_2$ ニ対応スル $[0, a]$ ノ元ハ $[a\theta_1, a] \simeq [0, b]$ ナル Isomorphismus デ $b\theta_2$ ニ対応スル元 $a\theta_1\theta_2$ デアル。

仮定ニ由リ $a\theta_1\theta_2 = 0$ 故ニ $a\theta_1 = 0$, $b\theta_1 = 0$ ヲ得ル。

ヨッテ定理ハ証明サレタ。 (証終)

〔定理8〕 θ ニ由リ $a \sim b$ トシ、更ニ $[0, a]$ ヲ a' ニ対シ コノ写像 θ ニ由リ $a' \simeq b$ トスレバ $a = a' \cup a''$ ナル a ノ直和分解ガ得ラレル。且コノデ a'' トシテ θ ニ対応スル $[0, a]$ ノ元 a_θ ヲトレバヨイ。

(証明) $[a_\theta, a] \simeq [0, b]$

且 $(a' \cup a_\theta) \cdot \theta = a' \cdot \theta = b$ ナル故 $a = a' \cup a_\theta$ デアル。又 $(a' \wedge a_\theta) \cdot \theta = 0$ ナル故、仮定ニ由リ $a' \wedge a_\theta = 0$

ヨッテ定理ヲ得ル。 (證終)

〔定理9〕 $a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$

$= c_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$

ヲ a ノ二ツノ直既約分解トスレバ $r = s$ デ且 c_i ノ番号ヲ適當ニツケカヘル事ニ由リ 任意ノ i ニ対シ $a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots \cup b_i \cup c_{i+1} \cup \cdots\cdots \cup c_s$ ガ又 a ノ直既約分解トナル様ニ出来ル。

(証明) 二ツノ分解ニ対應スル End. ヲ夫々 $\beta_1, \cdots\cdots, \beta_r$: $\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_s$ トスル。

$b_1 \leq b_1(\gamma_1 + \cdots\cdots + \gamma_s)$ ナル故、

$b_1 = b_1(\gamma_1 + \cdots\cdots + \gamma_s)\beta_1 = b_1(\gamma_1\beta_1 + \cdots\cdots + \gamma_s\beta_1)$

γ_i ハ $[0, b_1]$ カラ $[0, c_i)$ ノ中ヘノ n. Homo. ヲ与ヘル故 定理3ニ由リ $\gamma_i : \beta_1$ ハ b_1 ノ n. End. デアル。

スベテノ i ニ対シ $b_1 \gamma_i \beta_1 \angle b_1$ トスレバ、b_1 ハ直既約ナル故、定理6ニ由リ 或 n ガ存在シテ、スベテノ i ニ対シ、

$b_1(\gamma_i\beta_1)^n = 0$ デアル。

故ニ $b_1(\gamma_1\beta_1 + \cdots\cdots + \gamma_s\beta_1)^{sn}$ ヲ考ヘレバ、各項ハ或 $\gamma_i\beta_1$ ヲ Faktor トシテ少クトモ n 回モツ。故ニコレハ0デアル。

コレハ $b_1(\gamma_1\beta_1 + \cdots\cdots + \gamma_s\beta_1)$ ニ b_1 ナル事ニ矛盾スル。

$b_1\gamma_1 = c_1'$ トスレバ

$$b_1 \underset{\gamma_1}{\sim} c_1' \underset{\beta_1}{\sim} b_1$$

コノデ $\gamma_i \beta_i$ ハ上ノ事ニヨリ Isomorphismus ヲ与ヘル故

定理7ニ由リ $b_i \simeq c_i' \simeq b_i$

$\gamma_i \quad \beta_i$

$c_i \underset{\beta_i}{\sim} b_i$ ナル故定理8ニ由リ $c_i = c_i' \cup c_i''$ ナル直和分解ガ存在シ、c_i ガ直既約ナル事ヨリ $c_i'' = 0$. 即チ $c_i \underset{\beta_i}{\simeq} b_i$ デアル。

$a' = b_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$ トスレバ、

$a'\gamma_i = b_i\gamma_i = c_i$ 且 $a' \supset \overline{c_i}$ ナル故 $a = a'$

又 $d(b_i) = d(c_i)$ ナル故

$a = b_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$ ハ直既約分解デアル。

コノ分解ト $a = c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_s$ ナル分解ニツイテ上ノ同ジ事ヲヤリ、コレヲ続ケレバ吾々ノ定理ヲ得ル。 (証終)

[定義4] $a = d_1 \cup \cdots\cdots \cup d_t$ ナル直和分解ガ $a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ナル直和分解ノ "Verfeinerung" デアルトイフノハ各 b_i ニ対シ $b_i = d\beta_1 \cup \cdots\cdots \cup d\beta_\kappa$ ナル直和分解ガ存在スルトキトスル。

[定理10] $a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ……(1)

$= c_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$ ……(2)

ナルニツノ直和分解ニ対シ、共通ノ Verfeinerung ガ存在スルタメノ完全條件ハ

$a = (b_1 \cap c_1) \cup (b_1 \cap c_2) \cup \cdots \cup (b_i \cap c_j) \cup \cdots\cdots$

$\cup (b_r \cap c_s)$ ナル a ノ直和分解ガ成立スル事デアル。

(証明) (十分)

$a = (b_1 \cap c_1) \cup (b_1 \cap c_2) \cup \cdots\cdots \cup (b_r \cap c_s)$ ガ直和分解トスル。

$b_i \geq (b_i \cap c_1) \cup \cdots\cdots \cup (b_i \cap c_s)$

$c_j \geq (c_j \cap b_1) \cup \cdots\cdots \cup (c_j \cap b_r)$

故ニ次元ヲ考ヘレバ上ノ仮定カラ、コノ二式デ等号ガ成立ツ事ガ分ル。即チ、$b_i \cap c_j$ ヲ Faktor トスル上ノ a ノ直和分解ハ (1), (2) ノ共通ノ Verfeinerung デアル。

(必要) $a = d_1 \cup d_2 \cup \cdots\cdots \cup d_t$ ナル (1), (2) ノ共通ノ Verfeine.

verfeinerung が存在シタトスル。

$b_i = d = d_{v_1} \cup \cdots\cdots \cup d_{v_n}$

$c_j = d_{\mu_1} \cup \cdots\cdots \cup d_{\mu_l}$

トシ、ソノ共通ノ Faktor ヲ $d_\rho, \cdots, d_{\rho_n}$ トスレバ、明ニ

$d_{\rho_1} \cup d_{\rho_2} \cup \cdots \cup d_{\rho_n} = b_i \wedge c_j$ デアル。

b_i ノ各 Faktor d_ν ハ仮定ニヨリ或 c_j ノ Faktor ニナッテヰル故

$$b_i \leqq (b_i \wedge c_1) \cup \cdots\cdots \cup (b_i \wedge c_s)$$

逆ノ不等号ハ明ニ成立スル故

$$b_i = (b_i \wedge c_1) \cup \cdots\cdots \cup (b_i \wedge c_s)$$

且 $b_i \wedge c_j \leqq c_j$ ナル故コレハ b_i ノ直和分解デアル。

故ニ $a = (b_1 \wedge c_1) \cup (b_1 \wedge c_2) \cup \cdots\cdots \cup (b_r \wedge c_s)$ ハ直和分解デアル。 (証終)

[定理11] $a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$= c_1 \cup \cdots\cdots \cup c_s \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

ナルニツノ直和分解ニ対応スル n. End ヲ夫々 $\beta_1, \cdots, \beta_r$; $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ トスレバ エノニツニ対シ共通ノ Verfeinerung が存在スルタメノ完全条件ハ

$a \cdot \beta_i \gamma_j = a \cdot \gamma_j \beta_i$ ナル事デアル。

(証明) (十分)

$a \cdot \beta_i \gamma_j = a \cdot \gamma_j \beta_i$ トスル。

$\{\beta_i \gamma_j \mid i = 1, \cdots, r : j = 1, \cdots, s\}$ ナル a ノ n. End ノ System ハ (定理4') ノ三条件ヲ充タス。

(1) ハ明

(2') $a \cdot \beta_i \gamma_j \beta_i \gamma_j = a \cdot \gamma_j \beta_i \gamma_j = a \cdot \beta_i \gamma_j$

又 $i \neq k$ ナラバ、$a \cdot \beta_i \gamma_j \beta_k \gamma_l = a \cdot \gamma_j \beta_i \beta_k \gamma_l = 0$

$i \neq k$, $j \neq l$ ナレバ、

$a \cdot \beta_i \gamma_j \beta_i \cdot \gamma_l = a \cdot \gamma_j \beta_i \gamma_l = a \cdot \beta_i \gamma_j \gamma_l = 0$

故ニ (2') ガイヘタ。

(3) $a(\sum_{ij}\beta_i\gamma_j)=a(\beta_1+\cdots+\beta_r)\gamma_1\cup\cdots\cup a(\beta_1+\cdots+\beta_r)\gamma_s=a$

故ニコノ System ニ対応シテ

$a=a\beta_1\gamma_1\cup a\beta_1\gamma_2\cup\cdots\cup a\beta_r\gamma_s$ ナル直和分解ガ出来ル。

$a\beta_i=a(\gamma_1+\cdots+\gamma_s)\beta_i=a\gamma_1\beta_i\cup\cdots\cup a\gamma_s\beta_i$

$=a\cdot b_i\gamma_1\cup\cdots\cup a\beta_i\gamma_s$

ナル故 コレハ(1)ノ Verfeinerung: 同様ニ(2)ノ Verfeinerung デアル事モイヘル。

(必要) (1) (2)ガ共通ノ Verfeinerung ヲモツトスレバ

定理10ニ由リ $a=(b_1\wedge c_1)\cup(b_1\wedge c_2)\cup\cdots\cup(b_r\wedge c_s)$ ナル直和分解ガ成立スル。

明ニ $b_i=a\cdot\beta_i=(b_i\wedge c_1)\cup(b_1\wedge c_2)\cup\cdots\cup(b_i\wedge c_s)$

$\therefore a\cdot\beta_i\gamma_j=b_i\gamma_j=b_i\wedge c_j$

同様ニ $a\gamma_j\beta_i=c_j\wedge\beta_i$ 故ニ $a\cdot\beta_i\gamma_j=a\cdot\gamma_j\beta_i$ デアル。

(証明終)

[定理12] $a=b_1\cup b_2\cup\cdots$ ノ b_r ナル直和分解ガ他ノ任意ノ直和分解ニ対シ共通ノ Verfeinerung ヲモツタメノ完全条件ハ $\gamma^2=\gamma$ ナル a ノ n. End. γ ニ対シ、常ニ $b_i\gamma\leqq b_i$ ナル事デアル。

(証明)

(十分) 各 b_i ガ定理ノ条件ヲ充タストスル

$a=b_1\cup b_2\cup\cdots\cup b_r\cdots\cdots$ (1)

$a=c_1\cup c_2\cup\cdots\cup c_s\cdots\cdots$ (2)

(2)ヲ(1)以外ノ或直和分解トシ、(1)、(2)ニ対応シ夫々

$\beta_1,\cdots\beta_r$; $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ ナル n. End. アルトスル。

$a=a\cdot(\beta_1+\cdots+\beta_r)(\gamma_1+\cdots+\gamma_s)$

$=a\cdot\beta_1\gamma_1\cup a\cdot\beta_1\gamma_2\cup\cdots\cup a\cdot\beta_i\gamma_j\cup\cdots\cup a\beta_r\gamma_s\cdots$ (3)

定理ノ仮定ニ由リ

$a\cdot\beta_i\gamma_1\cup a\beta_i\gamma_2\cup\cdots\cup a\beta_i\gamma_s\leqq a\cdot\beta_i$

故ニ次元ヲ考ヘレバ

$a\cdot\beta_i=a\cdot\beta_i\gamma_1\cup a\cdot\beta_i\gamma_2\cup\cdots\cup a\cdot\beta_i\gamma_s$

且コレハ直和分解デアル。

ヨッテ(3)ハ a ノ直和分解デアリ、更ニ(1)ノ Verfeinerung

デアル。 $\Sigma_i \cdot \delta_j = a \cdot (\beta_1 + \cdots\cdots + \beta_r)\delta_j = a \cdot \beta_1 \delta_j \cup$

$\cup a\beta_r\delta_j$ ナル故 (3)ハ(2)ノ Verfeinerung デモアル。

即チ(1),(2)ノ共通ノ Verfeinerung ノ存在ガイハタ。

(必要) γ ヲ $\gamma^2 = \gamma$ ナル a ノ n. End. トスル。

定理5ニ由リ $a = a \cdot \gamma \cup a_\gamma$ ナル直和分解ガ成立スル。(コヽデ a_γ ハ γ ニ対応スル $[0, a]$ ノ元トスル)

$a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ガコレト共通ノ Verfeinerung ヲモツ事ヨリ $b_i = (b_i \wedge a \cdot \gamma) \cup (b_i \wedge a_\gamma)$ ナル直和分解ガ存在スル事ガ分ル。

γ ニヨリ $[0, a]$ ハ $[0, a \cdot \gamma]$ ノ上ニ写像サレル故

$x \in [0, a \cdot \gamma]$ ナラバ $\exists y \in [0, a] : y \cdot \gamma = x$

$\therefore x \cdot \gamma = y \cdot \gamma^2 = y \cdot \gamma = x$ デアル。

$\therefore b_i \cdot \gamma = (b_i \wedge a \cdot \gamma) \cdot \gamma = b_i$

ヨッテ定理ノ條件ガ必要ナル事ガイハタ。 (証終)

〔定理13〕

$a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ガ a ノ唯一ツノ直既約分解ナルタメノ完全條件ハ $\gamma^2 = \gamma$ ナル a ノ任意ノ n. End. γ ニ対シ $b_i \cdot \gamma \leq b_i$ ナル事デアル。

(証明) $a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ナル直既約分解ガ唯一ツノ直既約分解ナルタメノ完全條件ハ他ノ任意ノ直和分解ト共通ノ Verfeinerung ヲモツ事デアル。ヨッテ定理12ヨリコノ定理ハ明デアル。 (証終)

1947. 2. 12