



Title	或 Characteristic subgroup ヲモツ群ノ automorphism ニツイテ
Author(s)	永尾, 汎
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(4), p. 59-63
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75167
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

32. 或 Characteristic subgroup ラモツ群ノ automorphism
ニツイテ

(阪大) 永尾 汎

O_f 7 characteristic subgroup 7c ラモツ群トスル。

又 $O_f/n \simeq O_c$

$$G = \sum_{a \in A} f(a) S_a \quad Ca, b = S_a S_b S_a^{-1} \text{ トスル.}$$

要ニ A_G, A_N, A のヨモツチ大々 G, N, A の automorphism 全体ノ作ル群トスレバ. A_G ノ元 d ハ N 及 A ノ automorphism $d', \bar{d}$ ヲヒキオコス故 $d = (d', \bar{d})$ ヲ対応サセル事ニヨリ.

$$A_G \sim A_N \times A_A.$$

コ、デ $A_G \times A_A$ ノ單位元 $(1, \bar{1})$ ニ対応スル A_G ノ self-conjugate ナ subgroup ヲ M_G デ表ハセバ. A_G ハ M_G ノ $A_N \times A_A =$ 含まレル 或 subgroup ニ由ル extension デアル. コ、デハ M_G 及 M_G ノ extension トシテノ A_G ヲ決定スル.

[定理 1] M_G ヲ d ナラバ $Z_G = G^d G^{-1}$ ハ N ノ center ニ含まレ 且 $N \in N$ ナラバ $Z_N = E$ (E ハ A ノ單位元) デアル.

[証明] $S_a^d = N_a S_a$ トマレバ

$$(S_a N)^d = N_a S_a N$$

$$\therefore (N S_a)^d = (S_a N S_a)^d = N_a N S_a \\ = N^d S_a^d = N N_a S_a$$

$$\therefore N N_a = N_a N$$

コレハ N ノ任意ノ元 N ニツイテ成立スル故 $N_a \in C(N)$: N ノ center 又 A ノ任意ノ元 G ハ $S_a N$ ナル形ニ表ハサレル故

$$Z_G = G^d G^{-1} = N_a S_a N (S_a N)^{-1} = N_a$$

ヨツテ定理ガ証明出来タ.

(証明終)

[定理 2] $N \in N$ ナラバ $Z_N G = Z_G N = Z_G$ デアル.

$$(\text{証明}) \quad Z_N G = (N G)^d G^{-1} N^{-1} = N G^d G^{-1} N^{-1} = N Z_G N^{-1} = Z_G$$

$$\text{又 } Z_G N = Z_N G = Z_G$$

以上ニヨリ M_G ノ元 d ハ $Z_a = S_a^d S_a^{-1}$ ニ由リ一意的ニ決定サレル事が分ツタ.

[定理 3] A カ N ノ center ノ中ヘノ寫像 $a \rightarrow Z_a$ ガ上ノ様ニ意味ヲ M_G ノ元ヲ決定スルタメニハ. 即チ

$$d: N S_a \rightarrow N Z_a S_a \text{ ガ } M_G \text{ ニ属スルタメニハ.}$$

⊗ $Z_a Z_b^{Sa} = Z_{ab}$ ナル事が必要且十分デアル。

(証明)

$$\begin{aligned}
 (\text{必要}) \quad \alpha \in \text{Mg} \text{ デアレバ } \quad Ca, b &= Ca, b = Sa^\alpha Sb^\alpha Sa^{-\alpha} \\
 &= Za Sa Zb Sb Sa^{-\alpha} Za^{-\alpha} \\
 &= Za Zb^{Sa} Sa Sb Sa^{-\alpha} Za^{-\alpha} \\
 &= Za Zb^{Sa} Za^{-\alpha} Ca, b
 \end{aligned}$$

$$\therefore Za Zb^{Sa} Za^{-\alpha} = E \rightarrow Za Zb^{Sa} = Zab$$

(十分) Za が ⊗ ナル条件ヲ充タストスル。

$$G_1 = N_1 Sa \quad G_2 = N_2 Sb \text{ トスレバ。}$$

$$\begin{aligned}
 (G_1, G_2)^\alpha &= (N_1 Sa N_2 Sb)^\alpha = (N_1 N_2^{Sa} Ca, b Sab)^\alpha \\
 &= N_1 N_2^{Sa} Ca, b Zab Sab
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{一方 } G_1^\alpha G_2^\alpha &= (N_1 Sa)^\alpha (N_2 Sb)^\alpha = N_1 Za Sa N_2 Zb Sb \\
 &= N_1 Za N_2^{Sa} Zb^{Sa} Ca, b Sab \\
 &= N_1 N_2^{Sa} Ca, b Za Zb^{Sa} Sab \\
 &= N_1 N_2^{Sa} Ca, b Zab Sab
 \end{aligned}$$

$$\therefore (G_1, G_2)^\alpha = G_1^\alpha G_2^\alpha$$

且 α ハ Mg ノ元 ノ 冪ニ一対一ノ対応ヲ與ヘル故 Mg 二属ス。

(証明終)

[定理 4.] Mg ハ Ω カラ $C(\Omega)$ ノ中ヘノ寫像 $\alpha \rightarrow Za$ デ ⊗ ナル条件ヲ満足スルモノ全体デ。 $(\alpha \rightarrow Za) \cdot (\alpha \rightarrow Za') = (\alpha \rightarrow Za Za')$ ト積ヲ定義スル事ニ由リ出來ル群ト同型デアル。

(証明) Za, Za' ニ由リ決定サレル Mg ノ元ヲ夫々 α, α' トスレバ $Sa^{\alpha\alpha'} = (Za Sa)^{\alpha'} = Za Za' Sa$ ナル故定理 3. ヲリ明デアル。

[系 1] Mg ハ Abel 群デアル。

[系 2] Ω ガ 冪ニ Mg ノ center ニ含マレレバ ⊗ ナル条件ハ

$Za Zb = Zab$ トナリ。從ツテ Mg ハ Ω カラ Ω ノ中ヘノ homomorph + mapping 全体ノ作ル群ト同型デアル

次 $= A_{\alpha}$: 元 α フトリ $Sa^{\alpha} = Na Sa$ トスレバ、 α ハ $(\alpha', \bar{\alpha}, Na)$
ニ由リ一意的ニキマル。逆ニコノ意味デ $(\alpha', \bar{\alpha}, Na)$ ガ A_{α} ノ
元 α フ決定スルタメノ条件ヲ示メル、

[定理 5] $(\alpha', \bar{\alpha}, Na)$ ガ上ノ意味デ A_{α} ノ元ヲ決定スルタメノ必
要十分ナル条件ハ

$$(1) Ca^{\alpha'} b Na b = Na Nb Sa^{\alpha} Ca^{\alpha}, b^{\alpha}.$$

(2) 凡ノ任意ノ元 N ニ對シ

$$N Sa^{\alpha} Na = N \alpha'^{-1} Sa^{\alpha} \alpha'$$

ガ成立スル事デアル。

(証明) (必要)

$$\begin{aligned} Ca^{\alpha'} b &= Sa^{\alpha} Sb^{\alpha} Sa^{\alpha} b^{\alpha} \\ &= Na Sa^{\alpha} N^{\alpha'} Sb^{\alpha} S(\alpha b)^{\alpha} Na b^{\alpha} \\ &= Na Nb Sa^{\alpha} Ca^{\alpha} b^{\alpha} Na b^{\alpha} \end{aligned}$$

故ニ (1) ハ必要條件デアル、

$$\begin{aligned} (Sa N Sa^{\alpha'})^{\alpha} &= (N Sa)^{\alpha} = Na Sa^{\alpha} N^{\alpha'} Sa^{\alpha} Na^{\alpha} \\ &= N \alpha'^{-1} Sa^{\alpha} Na \end{aligned}$$

故ニ (2) ハ必要條件デアル。

(十分)

凡ノ元ト Sa カラ生成サレ基本關係トシテ凡ノ關係及

$$Sa N Sa^{\alpha'} = N Sa, Sa Sb = Ca b Sab \text{ フモツ. (1)(2) フ}$$

$(\alpha', \bar{\alpha}, Na)$ フ充タセハ α ナル *morphism* ガコレラノ關係
式ヲ保存スル事ハ必要條件ノ証明ヲミレバ明サアル。從ツ
テ α ハ A_{α} ニ屬スル、

次 $= A_{\alpha}$ ハ $M_{\alpha} : A_n \times A_n$ ノ或 *subgroup* ニ由ル *extension*
デアルガ、代表系 $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha', Na, \alpha)$ ラキヌタトキ、ソノ *factor*
set 及 *automorphism* ヲ決定スル。

(I) *automorphism*

$$\bar{\alpha} = \alpha, \alpha', Na, \alpha \quad \beta = (1, \bar{\alpha}, Zu) \text{ トスレバ}$$

$$\bar{\alpha}^{-1} \beta \bar{\alpha} = (1', \bar{1}, Z_a^{\alpha'} \bar{\alpha}^{-1}) \text{ デアル。}$$

$$\bar{\alpha}^{-1} \beta \bar{\alpha} \quad - \alpha' - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore S_a &= (N_{\alpha, a} \bar{\alpha}^{-1} S_a \bar{\alpha}^{-1}) \beta \bar{\alpha} \\ &= (N_{\alpha, a}^{\alpha' - 1} Z_a^{\alpha'} S_a \bar{\alpha}^{-1}) \bar{\alpha} \\ &= N_{\alpha, a}^{\alpha' - 1} Z_a^{\alpha'} \bar{\alpha}^{-1} N_{\alpha, a}^{\alpha' - 1} S_a = Z_a^{\alpha'} \bar{\alpha}^{-1} S_a \end{aligned}$$

(II) factor sit.

$$\bar{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha}, N_{\alpha, a}), \quad \bar{\beta} = (\beta', \bar{\beta}, N_{\beta, a}) \text{ トスレバ}$$

$$\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\alpha}^{-1} = (1', \bar{1}, N_{\alpha, a}^{\alpha' - 1} N_{\beta, a}^{\beta' - 1} N_{\alpha, a}^{\alpha' - 1}) \text{ デアル。}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_a \bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\alpha}^{-1} &= (N_{\alpha, a} S_a \bar{\alpha}^{-1}) \bar{\beta} \bar{\alpha}^{-1} = (N_{\alpha, a} N_{\beta, a}^{\beta' - 1} S_a \bar{\alpha} \bar{\beta}) \bar{\alpha}^{-1} \\ &= N_{\alpha, a}^{\alpha' - 1} N_{\beta, a}^{\beta' - 1} \bar{\alpha}^{-1} N_{\alpha, a}^{\alpha' - 1} S_a \end{aligned}$$

以上ヲマトメレバ次ノ定理ヲ得ル

〔定理6〕 Characteristic subgroup Ω ヲ G ガ含ムトスレバ

A_G ハ G/Ω カラ $C(\Omega)$ ノ中ヘノ定理3. ④ノ条件ヲ充タス mapping ノ作ル Abel 群 M_G ヲ self conjugate + subgroup トシテ含ミ, A_G 及 $A_{G/\Omega}$ ノ元 $R, \bar{\alpha} =$ 対シ, 定理5ノ(1) (2) ヲミタス N_G ラーツ足メレバ, A_G ハ (I), (II) ニ由リ決定カレル M_G ノ extension トシテ定メル事ガ出来ル.

(1947. 2. 12)