



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 有理型函数ノ除外値ニ就テ                                                                |
| Author(s)    | 遠木, 幸成                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1947, 2(4), p. 68-72                                             |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/75170">https://doi.org/10.18910/75170</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

### 35. 有理型函数ノ除外値ニ就テ

(阪大) 遠木 幸成

$W=f(z)$  ヲ  $|z| < R \leq \infty$  デー價超越有理ヲ函数トシソノ並函数ヲ  $Z=g(w)$

—68—

トスルトキ ( $= \varphi(w)$ ) / Riemann 面ガ如何ナル構造ヲモテハ  
 $w=a$ ガ Heuristica / 意味デ除外値 ( $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a)}{T(r)} > 0$ ) デ  
 アルカ否カトイフ問題ニ 迄テハ 多クノ人々ニヨリ研究サレテ 年ルガ私  
 ハ 数年前ノ数物年会デ 変更ニ 昨年ノ秋ノ数学会ノ例会デ オ結シタコ  
 トヲ述ベマス。

**Lemma 1**  $Z = \varphi(w)$  ガ領域  $\Delta$  デ  $p$  價單葉ナ代数型函数トスレバ  
 分岐点ノ数ハ高々  $2(p-1)$  個デアル。

【証明】  $\Delta$  / Euler 指標ヲ  $f$  トシ  $\Delta$  上ノ  $Z = \varphi(w)$  / Riemann  
 面ノ Euler 指標ヲ  $\rho$  トスレバ Hurwitz / 関係式ニヨリ、

$$\rho = p f_0 + v \dots \dots \dots (1)$$

但シ  $v$  ハ 分岐次数ノ總和トスル。

然ルニ  $Z = \varphi(w)$  ハ 單葉函数ナル故ニ  $Z$  平面上ノ 一 枚ノ領域ニ 寫像  
 サレテ 年ルカラ  $p$  ハ 寫像領域ノ境界数ヨリ 2 ダケホサイ値デアル。

他方  $Z = \varphi(w)$  ガ  $p$  價ナルコトヨリ  $Z = \varphi(w)$  / Riemann 面ノ境  
 界数ハ  $\Delta$  ノ境界数 ( $\rho_0 + 2$ ) ノ高々  $p$  倍デアル。

$$\text{故ニ } p(\rho_0 + 2) - 2 \geq \rho$$

$$(1) \text{ニ代入シテ } p(\rho_0 + 2) - 2 \geq p f_0 + v \quad \therefore 2(p-1) = v \text{ (証)} \quad (2)$$

**Lemma 2** Modul  $M$  ナル円環領域デ  $q$  價單葉ナ正則函数  $Z = \varphi(w)$   
 ノ像領域  $D$  ハニ直連結デ  $\gamma$  ノ直径ヲ  $\delta$  トシニツノ境界ノ距離ヲ  
 $\delta$  トスレバ  $M$  ト  $q$  ダケニヨツテ定マル常数  $\delta_0$  ガ存在シテ  $\delta < \delta_0$   
 トナル。

【証明】  $\zeta = w^{\frac{1}{q}}$  ナル函数デ  $w$  平面上ノ Modul  $M$  / 円環領域ヲ  $\zeta$  平面上ノ  
 Modul  $\frac{1}{q} M$  ナル円環領域  $\Delta$  ニ寫像スレバ  $\Delta$  ハ  $Z = \varphi(\zeta^q)$  ニヨリ  $D$  =  
 一 対ニニ等角寫像サレル。故ニ Teichmüller / 円環領域ニ關スル曲  
 歪定理<sup>1)</sup>ニヨリ  $\delta < \delta_0$  ナルコトガ直今ニワカル。

**定理 1**  $w = f(z)$  ヲ  $|z| < R \leq \infty$  デ一價超越有理型ナ函数トシ、ソノ逆函数ヲ

附註 1) Teichmüller; Untersuchungen über konforme und  
 quasikonforme Abbildung Deutsch Math., 3 (1938) pp. 621-678.

$z = \varphi(w)$  トスルトキ次ノ條件 i) ii) ヲ満足スルナラバ  $m(r, a)$  ハ有界デアル。

i) アル正数  $\rho$  ガアツテ  $|w - a| < \rho$  上ニアル  $z = \varphi(w)$  ノ

Riemann 面ガスベテ高々  $\rho$  葉ノ Insel バカリカラナツテキル

ii) 円  $|w - a| = \rho$  ノ  $z$  平面上ニ於ケル象像ガ原点ト無限遠点トヲ分ツモノハ有限個シカナイ。2) (但シ  $f(0) \neq a$  トス)

[証明] 吾々ハ  $\rho = 2$  トシテモ一様ニウチハナイ故ニ  $\rho = 2$  トシテ証明シヨウ。

$|w| < 2$  ノ象像  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ガ  $|z| = r$  ナル円ヲ切り取ツトキノ弧ノハル中心角ヲ夫々  $\Theta_1(r), \Theta_2(r), \dots, \Theta_n(r)$  トシ十分  $r$  ヲ大キクトツテアルトスレバ條件 ii) ニヨリ  $\sum_{i=1}^n \Theta_i(r) < 2\pi$  デアル。 $C_i$  ニ含まレル  $|w - a| < 1$  ノ象像ヲ  $C_i'$  ト  $z = 0$  ヨリ  $C_i'$  マデノ距離ヲ  $r_i$  トシ  $C_i'$  ニヨリ切り取ラレタ  $|z| = r$  ノ弧ヲ  $\beta_i$  トスル。

今円環領域  $1 < |w| < 2$  ヲ Modul  $\frac{1}{2\rho-1}$  ナル  $(2\rho-1)$  個ノ円環領域ニ分ケレバ  $1 < |w| < 2$  上ノ各 Insel ハ Lemma 1 ニヨリ少クトモ一ツノ円環領域ノ上ニハ分岐点ヲモタナイ。故ニ

$\zeta = \log z$  ニテ  $C_i$  ヲ  $\zeta$  平面ニ寫像シテ考ヘレバ Lemma 2 ニヨリ  $\rho$  ニヨツテ定マル常数  $k_i$  ガ存在シテ。

$$\log \frac{r}{r_i} \leq k_i \Theta_i(r) \dots \dots \dots (2)$$

又  $|w - a| < 2$  上ノ Insel ハ高々  $\rho$  葉ナル故ニ

$$\int_{\beta_i(r)} \frac{\Im \arg \frac{f(z)-a}{f(z)-a}}{2\theta} d\theta \leq 2\rho\pi \dots \dots \dots (3)$$

(2) 及ビ (3) ニヨリ

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{f(e^{i\theta})-a}{f(z)-a} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\beta_i(r)} \log \left| \frac{f(z)-a}{f(z)-a} \right| d\theta$$

附註 2) 此ハコノ定理ヲ 1942 年ノ数物年会デ証明シツノ後 津村氏ヨリ學士院記事 1942 年ニ載リテ見ヘラレタガ其ニ條件 ii) ヲ忘レテマタ。コノ條件 iii) ガ必要ナルコトハ ii) ヲ除ケバ定理ガ成立シナイ例ヲ本論文ノ終リテ與ヘル方ヲソレヲ参照セタシ。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\beta_i(r)} \int_{1_i}^r \frac{\lambda \log \left| \frac{f(z)-a}{f(z)-a} \right|}{\alpha \log t} d \log t d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\beta_i(r)} \int \frac{\lambda \log \left| \frac{f(z)-a}{f(z)-a} \right|}{\alpha \log t} d \log t d\theta \\
&< \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{r_i}^r 2\pi p \alpha \log t < p \sum_{i=1}^n k_i(r) < 2\pi k p \quad (\text{E3})
\end{aligned}$$

国 (Teichmüller)  $w=f(z)$  ヲ  $|z|<R \leq \infty$  デ一價超越有理型ナ函数トシソノ逆函数ヲ  $z=\varphi(w)$  トスルトキ. アル正数  $\rho$  ガアツテ,  $|w-a|<\rho$  上ニアル  $z=\varphi(w)$  ノ Riemann 面ガスベチ 單葉ノ Insel バカリカラナツテマルナラベ  $m(r,a)$  ハ有界デアル. (但シ  $f(0) \neq a$  トス)

[証明]  $|w-a|<\rho$  上ノ Insel ガ單葉ナルコトヨリ條件 ii) ハ明ラカニ満足サレテマル故ニ定理 1 ヨリ直チニ成立スル.

**定理 2**  $w=f(z)$  ヲ  $|z|<R \leq \infty$  デ一價超越有理型ナ函数トシソノ逆函数ヲ  $z=\varphi(w)$  トスルトキアル正数  $\rho$  ガアツテ  $|w-a|<\rho$  上ニアル  $z=\varphi(w)$  ノ Riemann 面ガスベチ高々  $p$  葉ノ Insel バカリカラナツテマルナラベ  $\lim_{r \rightarrow \infty} m(r,a) < K$  トナル. 但シ  $K$  ハ  $p$  及ビ  $\rho$  ニヨツテ定マル常数デアル.

[証明] 若シ十分小サナ  $\rho'$  ヲトツタトキ  $|w-a|<\rho'$  ノ像ガ定理 1 ノ條件 ii) ヲ満足スルナラバ定理 1 ニヨリ直チニ成立スル. 故ニ如何程  $\rho'$  ヲ小サクトツテモ ii) ヲ満足シナイトスル. 本一般性ヲ失フコトナク  $\rho=1$  トオクコトが出来ル. 然ルトキハ円環領域  $e^{-(2p-1)\pi} < |w-a| < 1$  ヲ Modulo  $\pi$  ナル  $(2p-1)$  個ノ円環領域ニ分ケレバ, 各 Insel ハ少クとも一ツノ円環領域ノ上ニハ分岐点ヲモタナイ. 従ツテソノ  $z$  平面上ノ像ハ Modulo  $\pi$  ノ二重連結領域トナル. (Hurwitz ノ關係式ヨリ明ラカ) シカモ 零点ト無限遠点トヲ分ツトスレバ Teichmüller ノ曲歪定理ニヨリ適當ニ  $\gamma_i$  ヲ選ベバ  $|z|=\gamma_i$  ハ全ク Modulo  $\pi$  ノ二重連結領域ニ含マレル.

$$\begin{aligned}
\text{故ニ} \quad m(\gamma_i, a) &= 2\pi \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{f(z)-a}{f(z)-a} \right| d\theta \leq e^{(2p-1)\pi} \\
\text{故} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} m(r, a) &< e^{(2p-1)\pi} \quad (\text{証了})
\end{aligned}$$

図  $W=f(Z)$  ヲ  $|Z| < R \leq \infty$  テー 超越有理型ナ函数トシ、ソノ逆函数  
 ヲ  $Z=\varphi(W)$  トスルトキアル正数  $\rho$  ガアツテ  $|W-a| < \rho$  上ニアル  
 $Z=\varphi(W)$  ノ *Riemann* 面ガスベテ 高々  $p$  葉ナ *Insel* バカリカラナ  
 ヲツテモルナラバ  $W=a$  ハ除外値デハアリ得ナイ。

又ニ 吾々ハ定理 1 ニ於テ条件 ii) ヲ 除ケバ 定理 1 ガ成立シナイ 例ヲ導  
 ゲヨウ。

$$f(Z) = Z \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{Z}{3^{(2n)!}} \right)^2 \right]}{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{Z}{3^{(2n-1)!}} \right)^2 \right]}$$

コノ函数ハ  $Z = \pm 3^{(2n)!}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) テ零点ヲ  $Z = \pm 3^{(2n-1)!}$   
 ( $n=1, 2, \dots$ ) テ極ヲモツ函数デ 円周  $|Z|=3^{(2n)!}$  上テハ  $|f(Z)|$  ハ  $n$  ガ  
 十分大ナラバ 非常ニ小サク  $|Z|=3^{(2n-1)!}$  上デハ  $|f(Z)|$  ハ 非常ニ大キ  
 ナル故ニ  $\rho$  ヲ十分小サク選ベバ  $|W| < \rho$  上ノ  $f(Z)$  ノ逆函数  $Z=\varphi(W)$   
 ノ *Riemann* 面ハ 高々二葉ノ *Insel* バカリカラナツテモルガ 条件 ii)  
 ヲ満足シナイ 然カモ  $m(r, 0)$  ハ 有界デハアリ得ナイ。

1947. 3. 10