



Title	Topological group の completion について
Author(s)	吉澤, 尚明
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(4), p. 74-76
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75172
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

37. Topological group の completion について.

(阪大) 吉澤 尚明

(1°) Topological group G が與へられたとする. この時置位元の近傍系 $\{V\}$ によつて G に structure $\{V_x\}$ 及び $\{{}_xV\}$ が定義される. これを夫々 *right-invariant structure* 及び *left-invariant structure* といふことにする. 更に この様な structure の1つに関するすべての Cauchy family が収斂する時に G をその structure で complete であると定義し, G が或る Complete group $\bar{G}$ の (structure をも含めた意味で) dense subgroup になつてゐる時に, G はその structure に関して completion が可能であると定義する. (A. Weil, Sur les espaces a structure uniforme, Actes'it', 551, p. 30 参照). A. Weil は G が completion が可能であるための1つの充分条件を導いてゐる (ibid, p. 32) が, 以下 (2°) に於て1つの必要且充分なる条件を与へる.

尚 容易にわかる様に G のどの *right-invariant structure* に関する Cauchy family の全体も一致する.

left-invariant structure に関しても同様である. 又, G が1つの *right-* 又は *left-invariant structure* によつて completion が可能であれば, 他の任意の *right-invariant structure* 及び *left-invariant structure* によつても completion が可能であり, しかもこれらの completion は, G を $\bar{G}$ に寫す様な対応によつて isomorphic になることも容易に証明される. 従つて, 更に, G は, completion が可能であるといふ表現が許される.

しかし, G が, 1つの一般の, 即ち右にも左にも invariant でない structure に関して complete であつても, invariant structure に関しては completion が可能であるとは限らない. (3°) に於てこの様な G の例を与へる.

(2') 以下に述べることは 一般の (可附着性を仮定しない) *structure* に関して成立するけれども このでは簡単のために G が *Metrisable* であると仮定する。

定理 G が *completion* が可能であるための必要且充分なる条件は、 G の *right-invariant metric* に関する *Cauchy sequence* の全体と、*left-invariant metric* に関する *Cauchy sequence* の全体とが一致することである。

証明 条件が必要なることは容易にわかるから、充分なることを証明する。そのために先づ G の任意の *right-invariant metric* d を1つ固定する。そして次の (A) と (B) を証明すれば、後は一級の *metric space* の *completion* と同様に出来る。

(A) $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ なる時 $d(x_m^{-1}, x_n^{-1}) \rightarrow 0$ 。

(B) $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ 及び $d(y_m, y_n) \rightarrow 0$ なる時
 $d(x_m y_m, x_n y_n) \rightarrow 0$ 。

(A) の証明. $d(x, y)$ は *right-invariant metric* であるから、 $d'(x, y) \equiv d(x^{-1}, y^{-1})$ は1つの *left-invariant metric* である。このことと定理の条件とにより、(A) は明らかに成立する。

(B) の証明 は、 G に関する何らの仮定なしに、一般の場合に出来る。 $d(x_m y_m, x_n y_n)$ が $m, n \rightarrow \infty$ の時 $\rightarrow 0$ であると仮定して矛盾を導く。先づこの仮定から或 $\varepsilon > 0$ と、

(1) $m_1 < n_1 \leq m_2 < n_2 \leq \dots \leq m_k < n_k \leq \dots$ なる *integer* の系列 $\{m_k \mid 1 \leq k < \infty\}$, $\{n_k \mid 1 \leq k < \infty\}$ が存在して、

(2) $d(x_{m_k} y_{m_k}, x_{n_k} y_{n_k}) \geq \varepsilon$, $1 \leq k < \infty$ となる。

次に $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ なることから *integer* p を定めて、

(3) $m, n \geq p$ ならば $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ なる様に出来る。更にこの p を用ひて、*integer* q を定めて、

(4) $m, n \geq q$ ならば $d(x_p y_m, x_p y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ なる様にすることが出来る。(何となれば: $d(x_p y_m, x_p y_n) = d(x_p y_m y_n^{-1} x_p, e)$)

これが $\rightarrow 0$ なることは, $d(y_m, y_n) \rightarrow 0$

なることゝ, 乗法の連続性から明らかである.)

しからは (1) の中で $m_R \equiv \max(p, q)$ なる如き n については, d が *right-invariant* なること及び (3), (4) から,

$$\begin{aligned} & d(x_{m_R} y_{m_R}, x_{n_R} y_{n_R}) \\ & \equiv d(x_{m_R} y_{m_R} x_p y_{m_R}) + d(x_p y_{m_R}, x_p y_{n_R}) + d(x_p y_{n_R} x_{n_R} y_{n_R}) \\ & < d(x_{m_R}, x_p) + \frac{\varepsilon}{3} + d(x_p, x_{n_R}) \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

を得るが, これは (1) と矛盾する. (証明終)

(3°) 以下に 或 metric ρ に関しては *complete* であるが, *invariant metric* に関しては *completion* が, 可能でない様な group G の例を与える.

G は, *closed interval* $[0, 1]$ の *homeomorphism* で両端の点を動かさないもの全体の集合とし, *group multiplication* は *mapping* をつづけて行ふことであるとする. 更に metric d を

$$d(x, y) \equiv \sup \{ |x(t) - y(t)| \mid t \in [0, 1] \}$$

と定義すると $d(x, y)$ は *right-invariant* である. 従つて

$$d'(x, y) \equiv d(x^{-1}, y^{-1})$$

は *left-invariant metric* である. 今,

$$\rho(x, y) \equiv d(x, y) + d'(x, y)$$

と定義すれば, metric ρ に関して G は *complete* になる. しかし次に定義する系列 $\{x_n \mid 1 \leq n < \infty\}$ は d に関しては *Cauchy sequence* であるが, d' に関しては *Cauchy sequence* をなさない (従つて G は d に関しては *completion* が可能でない):

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2^{n-1}} \{ (2^{n-1})t - (2^{n-1} - 1) \}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

1947. 3 12