



Title	位相群の構造に就いて Ⅰ
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 91-94
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75175
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

40. 位相群の構造に就いて I

近 藤 基 吉

一般の位相群の構造を作用素環論の立場から論じて見度いと思ふ。此處で、先づ問題となる事は位相群 G の作用素に依る表現である。これを考へるために、 G の上の有界複素連続函数の全体からなる集合を C_G とする。 C_G の要素 f に対してノルム $\|f\|$ を

$$\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$$

で定義する。すると、

C_G は複素 Banach 空間である。

a を G の任意の要素とする時に、 C_G の上の作用素 T_a を

$$T_a f(x) = f(ax)$$

で定義する。すると、 T_a は有界線状であつて、しかも、 $\|T_a\| = 1$ である。

又、 $T_a T_b f(x) = T_a f(bx) = f(abx) = T_{ab} f(x)$ より $T_a T_b = T_{ab}$ が得られ、 $T_a = T_b$ の時には、 $T_a f(x) = T_b f(x)$ から、 $f(ax) = f(bx)$ となる。特に、 $x = e$ (e は G の単位要素) とすれば、 $f(a) = f(b)$ となる。ところで、 $a \neq b$ であれば、 C_G の要素 h を求めて、 $h(a) \neq h(b)$ の成立する様に出来る。これを證明するために、次の補助定理を與へる。

補助定理 a を G の要素とし、 $V(a)$ を a の任意の近傍とする時には、 G の上の有界連続函数 $f(x)$ を求めて、 $f(a) = 0$ 、 $x \in V(a)$ の時に、 $f(x) = 1$ である様に出来る。

此補助定理に依つて $a \neq b$ の時には、 C_G の要素 h を求めて、 $h(a) \neq h(b)$ の成立する様に出来る。これは $T_a = T_b$ に矛盾する。夫故に、 $a = b$ である。従つて、 $T_x (x \in G)$ の集合を V_G とすれば、これは G と代数的に同型である。

此處で、補助定理を證明して置かう。先づ、 $a = e$ が成立するとする。今、 G の部分集合 $W(2^n)$ ($n = 1, 2, \dots$) を次の様に定める。

(1) $W(2^{-n})$ は V に含まれる e の近傍である

(2) $\{W(2^{-n})\}^2 \subseteq W(2^{-n+1}) \quad (n > 1), \quad \{W(2^{-1})\} \subseteq V$

次に, $\rho = \sum_{k=1}^n 2^{-\lambda_k} \quad (\lambda_1, \lambda_2 < \dots < \lambda_n; \lambda_k \text{ は自然数})$ に対して $W(\rho) = W(2^{-\lambda_1}) W(2^{-\lambda_2}) \dots W(2^{-\lambda_n})$

と置く. すると, $\rho < \rho'$ の時に $W(\rho) \subseteq W(\rho')$ である. 何となれば, $\rho = \sum_{k=1}^n 2^{-\lambda_k}, \quad \rho' = \sum_{k=1}^{n'} 2^{-\mu_k}, \quad \lambda_k = \mu_k \quad (k=1, 2, \dots, j)$
 $\lambda_{j+1} > \mu_{j+1}$ とする時に

$$\begin{aligned} W(\rho) &= W(2^{-\lambda_1}) W(2^{-\lambda_2}) \dots W(2^{-\lambda_j}) W(2^{-\lambda_{j+1}}) \dots W(2^{-\lambda_n}) \\ &\subseteq W(2^{-\mu_1}) W(2^{-\mu_2}) \dots W(2^{-\mu_j}) W(2^{-\lambda_{j+1}}) W(2^{-\lambda_{j+1}+1}) \dots \\ &\quad W(2^{-\lambda_{j+1}-n-j+1}) \\ &\subseteq W(2^{-\mu_1}) W(2^{-\mu_2}) \dots W(2^{-\mu_j}) W(2^{-\mu_{j+1}}) \subseteq W(\rho') \end{aligned}$$

となるからである.

今, G の上の函数 $g(x)$ を次の様に定める. 即ち, $x \in W(2^{-n})$ ($n=1, 2, \dots$) の時には, $g(x) = 0$ と置き, $x \in W(\rho)$ を満たす有理数 ρ の存在する時には, 此様な ρ の上端を $g(x)$ とする. すると, $0 \leq g(x) \leq 1$ が得られ, $g(e) = 0$ で, しかも $x \in G - V(e)$ の時には $g(x) = 1$ である. ところで, $g(x)$ は又 G に於いて連続である. 何となれば, x_0 を G の任意の要素とする時に x_0 に於ける $g(x)$ の上端及び下端を夫々 M, m とする. すると, $m \leq g(x_0) \leq M$ であるが, 正数 ε に対して $g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$ を満たす有理数 ρ を取れば, $x_0 \in W(\rho)$ が成立ち, $W(\rho)$ は開集合である. 又, $\rho < m$ を満たす様な $W(\rho)$ の和を V とすれば, V は開集合であつて, しかも, x_0 は V の境界に属する. 従つて, $\bigcap W(2^{-n})$ は常に x_0 を含む. 故に, V の要素 x を求めて $x_0 \in x W(2^{-n})$ の成立する様に出来る. ところで, $x \in W(\rho), \quad \rho = \sum_{k=1}^n 2^{-\lambda_k} \quad \lambda_k > n \quad (k > j)$ とすれば

$$2 + 2^{-n} < \sum_{k=1}^j 2^{-\lambda_k} + 2^{-n} + 2^{-n} < \rho + 2^{-n+1}$$

より

$$\begin{aligned} x_0 \in W(\rho) W(2^{-n}) &\subseteq W\left(\sum_{k=1}^j 2^{-\lambda_k}\right) W(2^{-n}) W(2^{-n}) \\ &\subseteq W\left(\sum_{k=1}^j 2^{-\lambda_k} + 2^{-n}\right) W(2^{-n}) \subseteq W\left(\sum_{k=1}^j 2^{-\lambda_k} + 2^{-n+1}\right) \end{aligned}$$

が得られ、 $m \leq g(x_0) \leq n + 2^{-n+1} \leq m + 2^{-n+1}$ 、即ち、

$0 \leq g(x_0) - m \leq 2^{-n+1}$ である。 n は任意の自然数であるから、

$g(x_0) = m$ となり、 $M = m$ である。夫故に、 $g(x)$ は x_0 に於いて連続であつて、従つて、これは又 G に於いて連続である。即ち、

$g(x)$ は与へられた条件を満たす。

次に、 $a \neq e$ の時を考へる。 e の近傍 $V(e)$ を求めて $a \in V(e)$ 、 $\subseteq V(a)$ の成立する様にする。其處で、 G の上の連続函数 $g(x)$ を求めて、 $0 \leq g(x) \leq 1$ 、 $g(e) = 0$ 、 $x \in G - V(e)$ の時には、 $g(x) = 1$ である様に出来る。今、 $f(x) = g(a^{-1}x)$ とすれば $f(a) = g(a^{-1}a) = g(e) = 0$ であつて、 $x \in U(a)$ の時には、 $a^{-1}x \in V(e)$ であるから、 $1 = g(a^{-1}x) = f(x)$ となる。故に $f(x)$ は与へられた条件を満たし、補助定理の證明は完了する。

今 V_G の位相を定義するため C_G の上の **全作用素環** R_G — C_G の上の有限線形作用素の全体からなる環 — を取り、 R_G 12 次の様な位相を与へる。 R_G の任意の要素 A と C_G の要素 $f_k (k=1, 2, \dots, n)$ と G の要素 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ と正数 ε とに対して、

$$|(A - X)f_k(x_k)| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

を満たす R_G の要素 X の集合を $\mathcal{U}(A; f_1, f_2, \dots, f_n; x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon)$ で示し、 A の **準弱近傍** と名付ける。 R_G は此近傍系に関して位相空間を作るが、これを R_G の **準弱位相** と名付ける。

ところで、此位相に関して U_G は G と位相同型である。何となれば G の要素 g に U_G の要素 T_g を対応せしめる代数的同型寫像 φ を取り、 G の要素 g_0 と T_{g_0} の準弱近傍 $\mathcal{U}(T_{g_0}; f_1, f_2, \dots, f_n; x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon)$ とを与へる。今 $|(T_{g_0} - T_g)f_n(x_k)| < \varepsilon$ 、即ち、 $|f_n(g_0 x_k) - f_n(g x_k)| < \varepsilon$ を満たす g_{nk} の集合を U_k とすれば、これは G の閉部分集合であつて、 $g_0 x_k \in U_k (k=1, 2, \dots, n)$ である。これより、 $g_0 \in \bigcap_k x_k^{-1} U_k$ が得られ、従つて、 $V(g_0) \subseteq \bigcap_k x_k^{-1} U_k (k=1, 2, \dots, n)$ を満たす g_0 の近傍 $V(g_0)$ が存在する。 $g \in V(g_0)$ の要素とすれば $g x_k \in U_k (k=1, 2, \dots, n)$ が得られ

$|(T_{g_0} - T_g) f_k(x_k)| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, n)$ である。夫故に、
 g は $\mathcal{U}(T_{g_0}; f_1, f_2, \dots, f_n; x_1, x_2, \dots, x_n; 2)$ に属し、
 従つて、 φ は g_0 に於いて連続である。これより φ の連続性が得られ
 る。

次に、 T_{g_0} を U_G の任意の要素とし U を g_0 の任意の近傍とする
 時に、 e の近傍 V を求めて $Vg_0 \subseteq U$ の成立する様に出来る。とこ
 ろで、補助定理に依つて C_G の要素 f を求めて $f(e)=0, g \in G-V$
 の時に、 $f(g)=1$ の成立する様に出来る。今、 T_{g_0} の準弱近傍
 $\mathcal{U}(T_{g_0}; f; g_0^{-1}; 1)$ を取り、此近傍に属する任意の要素 T_g を取
 る すると $|(T_{g_0} - T_g) f(g_0^{-1})| < 1$ であるから、

$|f(e) - f(gg_0^{-1})| < 1$ が得られ、 $|f(gg_0^{-1})| < 1$ である。

夫故に、 $gg_0^{-1} \in V$ が得られ、 $g \in Vg_0 \subseteq U$ である。従つて φ^{-1}
 は T_{g_0} に於いて連続であつて、これより φ^{-1} の連続性が得られる。

夫故に、 φ は G を U_G に寫す位相同型寫像である。従つて、以上の
 結果を綜合して次の定理が得られる。

定理 1 G を位相群とし、 C_G を G の上の有界連続函数からな
 る Banach 空間とする時には C_G の上の有界線状作用素 $T_g (g \in G)$
 の集合 U_G は 準弱位相に関して G と位相同型である。

此定理より直に次の系が得られる

系 G を緊密位相群とし、 C_G を G の上の連続函数からなる
 Banach 空間とする時には C_G の上の有界線状作用素 $T_g (g \in G)$
 の集合 U_G は弱位相に関して G と位相同型である。

1947.3.16