



Title	等距離集合に就て（Ⅰ）
Author(s)	津田, 文夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 94-98
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75176
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

41. 等距離集合に就て (I)

津 田 文 夫

Euclid 平面上に有界閉集合 E があるとき $\text{Front}(\Sigma \cup (x, r))$ なる集合を E の『距離 r の等距離集合』と呼び 記号 $E(r)$ を表す。以下に於て $E(r)$ の位相的, 計量的な性質を考へる, 先づ云へることは $E(r)$ の長さが有限なることが判る, 此を利用して考へてゆきます。

此の基本的な性質は全く近藤先生に倣うものです。

先づ $D(E) = \overline{\lim} \text{dis}(x, y) \quad x, y \in E$ と定義します。

Lemma 1. $\epsilon > 0$ $D(E)$ が非常に大きな値なるときは, $E(\epsilon)$ は円と近似せる *Jordan* 閉曲線である。

此を証明します。 $E \ni x$ をとります。そして x より任意の方向に半直線を引きます。その上に y をとります。但し $\text{dis}(x, y) > \epsilon + D(E)$ なる様にとる。すると y は $\sum_{x \in E} U(x, \epsilon)$ の外点なることは明か。又 x はその内点である。依てその半直線の x, y の間に境界点 a がある。もし境界点が一つ以上あるとせば むじゅんである。何故なればそれを a, b とする。但し x, a, b の順にあるものとする。さて $E \ni a', b'$ があり, $\text{dis}(a, a') = \text{dis}(b, b') = \epsilon$ なる点がある筈。

然るに $\triangle x a b'$ を見るに a が x と b の上にあるから

$$\text{dis}(b', a) < \max(\text{dis}(b, b'), \text{dis}(x, b')) \leq \max(D(E), \epsilon) = \epsilon.$$

そこで $a \in U(b', \epsilon) \subseteq \sum_{x \in E} U(x, \epsilon)$ 此は a が境界点なることにむじゅんする。

次に境界点が連続なることは x 点に原点をもつ極座標を作る。

$E(\epsilon)$ の方程式を $\varphi(\theta)$ であらわすとき $\varphi(\theta)$ の連続なることは適当な $\epsilon > 0$ をとると如何なる δ とつても $|\varphi_0 - \varphi'| < \delta$ なる δ' が存在して $|\varphi(\theta_0) - \varphi(\theta')| > \epsilon$ なるものがある。そこでその様は $\epsilon > 0$ に対して $\{\alpha_i\} (i = 1, 2, 3, \dots)$ をとりそれに対応して $\{\theta_i\}$ をとる。 $|\varphi(\theta_0) - \varphi(\theta_i)| > \epsilon$ かつ $|\theta_0 - \theta_i| < \alpha_i$ とする。すると $|\varphi(\theta_i)| < \epsilon + \epsilon(E)$ そこで Bolzano-Weierstrass の定理によつて $\{\theta_i\}$ に適当な部分列があり

$$\theta_{h_i} (i = 1, 2, 3, \dots) \text{ をとり, } \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_{h_i} = \theta_0 \quad \text{また}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(\theta_{h_i}) = \varphi_0 \neq \varphi(\theta_0) \text{ なるものがある。さて境界点の}$$

集積点は x 境界点である。そこで x 点より出る θ_0 線の上に少くも

二つの境界点があることになる。此は むじゅんである。そこで $E(\epsilon)$

は連続である。

$E(\epsilon)$ が長さを持つことを証明するため $E(\epsilon)$ はそのすべての点

に於て半切線を持つことを示したい

Lemma 2. $\frac{r}{D(E)}$ が非常に大きな値なるとき $E(r) \supset A, B$
 $\text{dis}(A, B) \ll r$ なるとき A, B を通る半径 r の円 O_1 の中に E の
点 O_2 があるとき, $E(r)$ の A, B を結ぶ部分は円 O_1 と一致するか
又はその内部に含る.

証明. $E(r)$ で囲む領域を $(E(r))$ とあらわす. さて, もし上の
命題が成立してゐないならば 円 O_1 と $(E(r))$ とは共通点を有す.

その点を M としておく. すると $E \supset O_2$ かつ 円 O_2 (半径は r とす)
の内部に点 M を含む様な O_1 が存在する.

$\text{dis}(A, B) \ll r$ とすれば $\text{dis}(O_2, O_3) > \frac{r}{2}$ である.

そこで $D(E) < \frac{r}{2}$ と假定しうる故むじゅんとなる.

Lemma 3. $D(E) \ll r$ なるとき, かつ $E(r) \supset A, B$
なるとき $\text{dis}(A, B) \ll r$ ならば A, B を通る円の中一つはその
内部に E の点を含む.

今 A に対応する E の点を A' とすれば, 又円の中心を O としおくと
 $\angle OAA' < 60^\circ$ であれば $AO = OA'$ となるから, A' は円 O の内部
にある. そこで今 $\angle OAA' \geq 60^\circ$ と假定する. 但し $\angle OAA' < 90^\circ$
となる様な O ととることにする. さて $\text{dis}(A, B) \ll r$ なる故
 $\angle OAB > 80^\circ$ としても良い 即 $\angle AAB > 140^\circ > \frac{3\pi}{4}$ 然るに
又一方 $\text{dis}(A, B) \ll r$ なるときは $\angle A'AB < \frac{3}{4}\pi$ が云へる.
何となれば $B' \in E$ を B に対応する点としたとき $\angle A'BB' < \arcsin$.
 $D(E)/r < 1$ として差支へない. 即 $\angle B'BA < 180^\circ + 1^\circ - 140^\circ$
 $= 61^\circ$ すると $AB \ll r$ なる故 A は円 B' の内部にあり即 $A \in \cup(B', r)$
此は A が $E(r)$ の点なることに むじゅんす.

Lemma 4. $D(E) \ll r$ なるとき $E(r)$ のすべての点に於て
半切線を有す.

証明 以下のとき今迄の Lemma の條件はすべて満されてゐ
る. 先ず Lemma 1. により極座標を適當にとれば $E(r)$ の各点に
parameter θ を対応せしめうる.

そこで $E(\rho)$ を $x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ として定義しない。此處に $f(\theta)$, $g(\theta)$ は θ につき一価連続なり。そのとき θ_0 点で右半切線をもたぬとすれば

$$\lim_{S \rightarrow S_0+0} \frac{g(S)-g(S_0)}{f(S)-f(S_0)} = \alpha \quad \overline{\lim}_{S \rightarrow S_0+0} \frac{g(S)-g(S_0)}{f(S)-f(S_0)} = \beta$$

は常に存在する。 S_0 を通つて方向係数 α , β を持つ半直線を ρ とする。 S_0 の如何なる近傍 $U(S_0, \delta_i)$ をとつても, 任意に $\varepsilon > 0$ を与へたとき $U(S_0, \delta_i)$ に $S_i, \bar{S}_i$ が存在して

$$\left| \frac{g(S_i)-g(S_0)}{f(S_i)-f(S_0)} - \alpha \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{g(\bar{S}_i)-g(S_0)}{f(\bar{S}_i)-f(S_0)} - \beta \right| < \varepsilon$$

が成立する。すると Lemma 2, によつて $\bar{S}_i \in \overline{S_i S_{i+1}}$ 此處に $\overline{S_i S_{i+1}}$ とは S_i, S_{i+1} を通る半径 ρ の円でその内部に E の点を含むものである。すると $\overline{S_0 S_i} \wedge \overline{S_0 \bar{S}_i} \leq \varphi$

此處に φ は半径 ρ の円で長さ $dis(S_i S_{i+1})$ をもつ弦の上の円周角である。すると $dis(S_i S_{i+1})$ を充分小にすれば $2\varphi < \alpha \wedge \beta = \theta$ となしうる。そこである $\varepsilon > 0$ に対して α を定めると

$U(S_0, \alpha) \cap S, \bar{S}$ をとれば $|\theta - \varphi| < \varepsilon'$ となる。

又上により $\varphi < \frac{\theta}{2}$ が成立する。そこで

$$\theta < \varphi + \varepsilon < \frac{\theta}{2} + \varepsilon \quad \varepsilon \text{ は任意なる故次が成}$$

立つ $\theta < \frac{\theta}{2}$ 。此は むじゅん。即ち α と β は一致せねばならぬ。

定理 1 E が有界閉集合なるとき $E(\rho)$ はすべての点に於て半切線を有する曲線なり。従つて $E(\rho)$ はつねに有限の長さをもつ。

証明 与へられた ρ に対して $D/\rho \ll 1$ が Lemma の条件を満たす様に D を定める。そして E の各点 x に対し $U(x, \frac{D}{2})$ なる近傍を与へると E が有界閉なる故に Borel-Lebesgue の被覆定理によつて E は有限個の $\{U(x_i, \frac{D}{2})\} (i=1, 2, \dots, n)$ によつて覆はれる。そこで各々の $U(x_i, \frac{D}{2})$ を Lemma の E と考へてやると良い。

此處で兩側の半切線が一直線をなす点を $E(\gamma)$ の正則点、然らざる点を角点という。すると次は容易にわかる。

$E(\gamma)$ の角点は高々可附番なり

何となれば $(E(\gamma), \gamma)$ を考えると長さが有限である 然も $E(\gamma)$ の角点に対して互に *disjoint* な弧が対応するから。

(1947.3.16)