OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | Dérivé-opération 二依ル位相空間 |
| Author(s) | 松下, 眞一 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 98-103 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/75177 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

## 42. Dérivé-opération ニ依ル位相空間

松　下　眞　一　(九大)

コレヲヤッテ斗タ頃カラ既ニ二ヶ年モ経ッタ。終戦トナッテモ重ナル紹介以上ノ報告ヲスル機会ガ無カッタノデ．コノ誌上ニ一応アル程度ノ詳シイ記述ヲヤッテ見タイト思フ。

ナホ．此ノ方面ノ研究ニツイテ．近藤基吉先生カラタマハッタ一方ナラヌ御指導ノ労ヲ衷心ヨリ感謝致シマス。

(1)

先ヅ問題ハ　点ノナイ位相空間ノ構成デアル．ソレニ対シテ Kuratowski ノ方法[1]ヲ 更ニ代数化サレク寺阪教授ノ方法[2]ハ興味深ク且ツ美シイ理論デアル．――所謂 Kuratowski-寺阪ノ代数――

所テ夫等ハ fermeture-operation (closure-operator) ニ依ッテ構成サレタモノデアルガ　ソノ代リニ dérivé-operator ヲ用ヒタナラバ．ドウナルカト云フト．fermeture ニ対スル色々ノ関係ガ dérivé ノ中ニ美シク modifier サレルノミナラズ．opération D(X) ト $X^{\circ}$ トノ対応[3]ガ 集合ト 開核ノ対応ノ直接ナ表現トシテ得ラレ．アル意味デノ並行性ガ考ヘラレルノデアル。

(2)

$\mathfrak{L}$ ヲ coole 代数トシ．単位-及ビ零-要素ヲ夫々 1 及ビ 0 デ．$X \in \mathfrak{L}$ ノ complément ヲ $X^{c}$ デアラハス。サテ $\mathfrak{L}$ ヲ $\mathfrak{L}$ 自身ニワンス homomorphisum $\varphi$ デ 次ノ三條件ヲ満スモノヲ考ヘル；即チ

$\varphi_1$ : $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$

$\varphi_2$ : $\varphi(0) = 0$

$\varphi_3$ : $\varphi(\varphi(X)) < \varphi(X)$

スルト容易ニ解ル如ク $\varphi_1$ ヨリ

$\varphi_4$ : $X \subset Y$ ナラバ $\varphi(X) < \varphi(Y)$

$\varphi_4$ ヨリ $\varphi_5$ : $\varphi(X \cdot Y) < \varphi(X) \cdot \varphi(Y)$

ガ得ラレル。次ニ順序数$\alpha$ニ対シテ $\varphi^{(\alpha)}(X)$ ヲ超限帰納法ニヨリ次ノヤウニ規定スル.

i) $\varphi^{(0)}(X) = X$

ii) $\alpha$ ガ孤立数ナラバ $\varphi^{(\alpha)}(X) = \varphi(\varphi^{(\alpha-1)}(X))$

iii) $\alpha$ ガ極限数ナラバ $\varphi^{(\alpha)}(X) = \prod_{\beta<\alpha} \varphi^{(\beta)}(X)$

スルト明ラカニ $\alpha < \beta$ ナラバ $\varphi^{(\alpha)}(X) \supset \varphi^{(\beta)}(X)$

且ツ $\varphi^{(\alpha+\beta)}(X) = \varphi^{(\beta)}(\varphi^{(\alpha)}(X))$ デアル.

サテ簡単ノタメ $\varphi^{(\alpha)}(X) = X^{(\alpha)}$ ト置キ $X^{(1)} = X^d$ ト置ケバ 孤立数ニ対シテハ $X^{(\alpha)} = (X^{(\alpha-1)})^d$ デアル。$X^{(\alpha)}$ ヲ$X$ノ$\alpha$次ノ *dérivé* ト呼ブコトニシ，特ニ一次ノ *dérivé* $X^d$ ヲ単ニ$X$ノ *dérivé* ト呼ブコトニシヨウ。

次ニ $\nabla \in \mathfrak{L}$ ニ対シテ

$\alpha$) $X \subset \nabla$ ニ $X = 0(\nabla)$

$\beta$) $X \cdot Y^c = 0(\nabla) \rightleftarrows X \subset Y(\nabla)$

$\gamma$) $X \subset Y(\nabla)$ 且ツ $Y \subset X(\nabla) \rightleftarrows X = Y(\nabla)$

ト定義スレバ容易ニ解ル如ク

Lemme 1. $X \subset Y(\nabla)$ ナラバ $X^d \subset Y^d(\nabla^d)$. 及ビ

$X \subset Y(\nabla^a)$ ナラバ $X^d \subset Y^d(\nabla^d)$ デアル。

( 3 )

サテ 1 ノ *adhérence* 即チ $1 \cdot 1^{ac} = 1^{ac}$ ヲ巳ト置クコトニスレバ $E = X^{dc} \cdot X^{cdc}$ ガ任意ノ $X \in \mathfrak{L}$ ニ対シテ成立スル.

スルト上ノ定義ヨリ直チニ

Lemme 2. $X^{ac} \subset X^{cd}(E)$ $X \in \mathfrak{L}$

Lemme 3. i) $X^{dcd} \subset X^{cd}(E)$

ii) $X^{cdcd} \subset X^{d}(E^d)$

何者, i) ハ $X^{dcd} \subset X^{cdd}(E^d) \subset X^{cd}(E^d)$

ii) ハ i) ニ於テ $X$ ノ代リニ $X^c$ ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2' $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}(E^d)$ (5)

Lemme 4 $X^{dc} \subset X^{dcd}(E)$ 且ツ $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^d)$
$\subset X^{(\beta)c(\alpha)}(E^d)$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5. $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明; $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^d) \subset X^{dc(\beta)}(E^d)$

逆ノ不等号ハ $X^{(\alpha)} \subset X^d \to X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \to X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}(E^d)$. 然ルニ $\beta = 1$ ノトキニハ
$E^d \subset X^{dca}$ ダカラ $E^d \subset X^{(\alpha)cd}$ 故ニ $X^{(\alpha)ca} = X^{dcd}$ ガ成立ス
ル。依ッテ一般ノ $\beta$ ニ対シテ然リ。C.q.f.d

Théorème 1. $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明; i) $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^d) = X^{(\alpha\gamma)}(E^d) \subset X^{(\alpha)}(E^d)$

故ニ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$. $(E^d)$ ハ Lemma 4 ノ
証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii) $(X^{(\alpha)c(\gamma)})^{(\delta)c} \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)})^{c(\delta)}(E^d) \to X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c}$
$X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)cc}(E^d) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}(E^d)$

依ッテ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma\beta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$ 但シ
コノ $(E^d)$ モ省クコトヲ得ル。i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル。C.q.f.d

サテコノ Théorème ニ於テ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ト置ケバ次ノ
系ガ得ラレル。

Corollaire $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ開核ニ関スル C. Kuratowski ノ等式(6)ノ準集合ニ於ケル
analogue デアル。

Lemme 3. i) $X^{dcd} \subset X^{cd}(E)$

ii) $X^{cdcd} \subset X^{d}(E^d)$

何者, i) ハ $X^{dcd} \subset X^{cdd}(E^d) \subset X^{cd}(E^d)$

ii) ハ i) ニ於テ $X$ ノ代リニ $X^c$ ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2' $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}(E^d)$ (5)

Lemme 4 $X^{dc} \subset X^{dcd}(E)$ 且ツ $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^d)$
$\subset X^{(\beta)c(\alpha)}(E^d)$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5. $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明; $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^d) \subset X^{dc(\beta)}(E^d)$

逆ノ不等号ハ $X^{(\alpha)} \subset X^d \to X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \to X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}(E^d)$. 然ルニ $\beta = 1$ ノトキニハ
$E^d \subset X^{dca}$ ダカラ $E^d \subset X^{(\alpha)cd}$ 故ニ $X^{(\alpha)ca} = X^{dcd}$ ガ成立ス
ル。依ッテ一般ノ $\beta$ ニ対シテ然リ。C.q.f.d

Théorème 1. $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明; i) $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^d) = X^{(\alpha\gamma)}(E^d) \subset X^{(\alpha)}(E^d)$

故ニ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$. $(E^d)$ ハ Lemma 4 ノ
証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii) $(X^{(\alpha)c(\gamma)})^{(\delta)c} \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)})^{c(\delta)}(E^d) \to X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c}$
$X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)cc}(E^d) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}(E^d)$

依ッテ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma\beta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$ 但シ
コノ $(E^d)$ モ省クコトヲ得ル。i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル。C.q.f.d

サテコノ Théorème ニ於テ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ト置ケバ次ノ
系ガ得ラレル。

Corollaire $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ開核ニ関スル C. Kuratowski ノ等式(6)ノ準集合ニ於ケル
analogue デアル。

サテ $X+X^d=X^a$ ト置キ $X^a$ ヲ $X$ ノ開放ト呼ブコトニスル。明ラカニ opération $X^a$ ハ (2) ニ於ケル9ノ條件ヲ滿定スルノミナラズ

Lemme 6. $X^{aa}=X^a$ 且ツ $X^{da}=X^{ad}=X^d$

$X\subset X^a$, $X^d\subset X^a$ ヨリ明ラカ。次ニ $a$ ト $d$ トノ關係トシテハ

Théorème 2. $X^{dcd}=X^{dca}(E^a)=X^{acd}(E^a)=X^{aca}(E^a)$

証明； 先ヅ $X^{dca}=X^{dc}+X^{dcd}=X^{dcd}(E)$ …… *)

次ニ $X^{dcd}\subset X^{cd}(E^d)\subset X^{ca}(E^d)$ (Lemma 4) 依ッテ $X^{dca}=(X^a)^{dcd}\subset$

$\subset X^{acd}(E^d)\subset X^{aca}(E^d)$ 又他方ニテ $X^{aca}=(X^cX^{dc})^a\subset$

$\subset X^{dca}=X^{dcd}(E)$. 故ニ $X^{dcd}=X^{dca}(E^a)=X^{acd}(E^a)=$

$X^{aca}(E^a)$

c. q. f. d.

Corollaire

$$X^{dcdcd}=\left\{\begin{matrix}X^{acdcd}\\X^{dcacd}\\X^{acdca}\end{matrix}\right\}(E^a)=\left\{\begin{matrix}X^{dcaca}\\X^{acdca}\\X^{acaca}\end{matrix}\right\}(E^a)=X^{acaca}(E^a)$$

次ニ $\sigma_n$ ナルモノヲ定義シ、ソレハ $d$ ヨリ始マリ $c$ 及ビ $d$ ガ交互ニ現ハレル有限列デアッテ、ソノ文字ノ總數ガ $n$ ナルモノトスル。例ヘバ、$\sigma_{2n}=dcdc\cdots\cdots dc$ ($dc$ ガ $n$ 個)，$\sigma_{2n+1}=dcdc\cdots\cdots dcd$ ($dc$ ガ $n$ 個トソノ後ニ $d$ ガ1個)。又 $\sigma_n$ ニ於テ $d$ ノ代リニ $a$ デ置換ヘタモノヲ $\rho_n$ ト書ク事ニスル。

Théorème 3. $n\geqq 3$ ナルトキ

i) 若シ $n$ ガ奇數ナラバ $X^{\sigma_n}+E\cdot X^{\rho_n}=X^{\rho_n}+E^d$

ii) 若シ $n$ ガ偶數ナラバ $X^{\sigma_n}+E^d\cdot X^{\rho_n}=X^{\rho_n}+E$

証明； 先ヅ Théorème 2 ノ系ヨリ一般ニ $X^{\sigma_n}=X^{\rho_n}(E^a)$ ガ成立シテヰル。若シ $n\geqq 3$ ガ奇數ナラバ $X^{\sigma_n}=(X^{\sigma_{(n-3)}})^{dcd}$ ト書ケルカラ $E^d\subset X^{\sigma_n}$ 且ツ $E\cdot X^{\sigma_n}=0$。依ッテ i) ノ等式ガ得ラレタ。

又 $n$ ガ偶數ナラバ (但シ $n\geqq 3$)、$E^d\cdot X^{\sigma_n}=0$ 且ツ $E\subset X^{\sigma_n}$

デアル。故= ii) ヲ得ル。 C. q. f. d.

Théorème 4. 若シ $n=4r+1$ 又ハ $n=4r$ ナラバ $X^{c(\beta)c} \subset X^{\sigma_n}(E^a) \subset X^{(\gamma)}(E^a)$ ガ成立スル。但シ $\beta, \gamma$ ハ任意ノ有限ナル順序数。

Corollaire $X^{cdc} \subset X^{\sigma_n}(E^a) \subset X^d(E^a)$。但シ $n=4r+1$ 又ハ $n=4r$ デアル。

次= C. Kuratowski ノ得タ Table (T)[1] =相當スルモノトシ次ノ二ツノ Table ヲ掲ゲル。

【Table 1】:

$$X^{cdc} \subset X^{cdcdcdc}(E^a) \begin{matrix} \nearrow CX^{dcdc}CE^a) \\ \searrow CX^{cdcd}(E^a) \end{matrix} \nearrow CX^{dcdcd}(E^a) \subset X^d(E^a)$$

【Table 2】

$$X^{dc} \subset X^{dcdcdc}(E^a) \begin{matrix} \nearrow C\,X^{cdcdc}(E^a) \\ \searrow C\,X^{dcd}\,(E^a) \end{matrix} \nearrow CX^{cdcdcd}(E^a) \subset X^{cd}(E^2)$$

Table 2 ハ (3) ニ於ケル Lemma 2 ヲ詳細ニシタモノデアル。サテ之等ヲ証明シヨウ。

証明； 定理4 =依ル $X^{dcdcd} \subset X^d(E^a)$ ダカラ $(X^c)^{dc} \subset (X^c)^{dcdcdc}(E^a)$。次= $X^{cdcdcdc} \subset X^{cdcdccd}(E) = X^{cdcd}(E) = X^{cdcd}(E)$ 即チ $X^{cdc} \subset X^{cdcdcdc}(E^a) \subset X^{cdcd}(E^a) \subset X^{dcdcd}(E^a) \subset X^d(E^a)$ ガ得ラレタ。又 $(X^{cdc})^{dcdc} \subset (X^d)^{dcdc}(E^a) \subset X^{dcdc}(E^a)$ 及ビ Lemme 2 ニヨリ $(X^{dc})^{dc} \subset (X^{dc})^{dcd}(E^a)$. 即チ $X^{cdcdcdc} \subset X^{dcdc}(E^a) \subset X^{dcdcd}(E^a)$ ガ得ラレル。コレデ Table I ハ完成シタ。ソコデ X ヲ $X^c$ デ置換ヘルト Table 2 ガ得ラレル。 C. q. f. d.

（未完）

【註】

(1) C. Kuratowski : Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analys Situs, Fund. Math. 3 (1922)

C. Kuratowski ; Topologie I. (1933)

(2) H. Terasaka ; Die theorie der Topologischen Verbände, Fund. Math. (1939)

(3) H. Terasaka ; loc cit.

(4) 後述ノハズ，ダトヘバ

H. Hahn ; Reelle Funktionen, (1932)

(5) コノ書ヲ通ジテ $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ ハ任意ノ順序数.

(6) C. Kuratowski ; loc. cit.

(7) C. Kuratowski ; loc. cit.

1947. 3. 16.

---