



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | Dérivé-opération 二依ル位相空間                                                    |
| Author(s)    | 松下, 眞一                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 98-103                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/75177">https://doi.org/10.18910/75177</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 42. *Dérivé-operation* ニ依ル位相空間

松下 眞 — (九大)

コレヲヤッテキタ頃カラ既ニ二年モ経ッタ。終戦トナッテモ軍ナル紹介以上ノ報告ヲスル機会が無カッタノデ。コノ誌上ニ一応アル程度ノ詳シイ記述ヲヤッテ見タイト思フ。

ナホ、此ノ方面ノ研究ニツイテ、近藤基吉先生カラタマハッター方ナラヌ御指導ノ勞ヲ衷心ヨリ感謝致シマス。

( 1 )

先ツ問題ハ 点ノナイ位相空間ノ構成デアル。ソレニ対シテ *Kuratowski* ノ方法<sup>(1)</sup>ヲ 更ニ代数化サレク寺阪教授ノ方法<sup>(2)</sup>ハ興味深ク且ツ美シイ理論デアル。——所謂 *Kuratowski*-寺阪ノ代数——

所テ夫等ハ *fermeture-operation* (*closure-operator*)ニ依ッテ構成サレタモノデアルガ ソノ代リニ *dérivé-operator*ヲ用ヒタナラバ、ドウナルカト云フト、*fermeture*ニ対入ル色々ノ関係ガ *dérivé*ノ中ニ美シク *modifier*サレルノミナラズ、*opération*  $D(X)$ ト  $X^0$ ト<sup>(3)</sup>ノ対応ガ 導集合ト 閉被ノ対応ノ直接ナ再現トシテ得ラレ、アル意味デノ並行性が考ヘラレルノデアル。

( 2 )

スヲ *coole*代数トシ、單位-及ビ零-要素ヲ夫々  $1$ 及ビ  $0$ デ、 $X \in \mathfrak{L}$ ノ *complément*ヲ  $X^c$ デアラハス。サテ  $\phi$ ヲ  $\phi$ 自身ニワッス *homomorphisum*  $\phi$ デ 次ノ三條件ヲ満スモノヲ考ヘル； 即チ

$$\varphi_1 : \varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

$$\varphi_2 : \varphi(0) = 0$$

$$\varphi_3 : \varphi(\varphi(X)) < \varphi(X)$$

スルト容易=解ル如ク  $\varphi_1$  ヨリ

$$\varphi_4 : X < Y \text{ ナラバ } \varphi(X) < \varphi(Y)$$

$$\varphi_4 \text{ ヨリ } \varphi_5 : \varphi(X \cdot Y) = (\varphi(X) \cdot \varphi(Y))$$

ガ得ラレル。次=順序数 $\alpha$ ニ対シテ  $\varphi^{(\alpha)}(X)$  ヲ超限帰納法ニヨリ次ノヤウニ規定スル。

$$i) \quad \varphi^{(0)}(X) = X$$

$$ii) \quad \alpha \text{ ガ孤立数ナラバ } \varphi^{(\alpha)}(X) = \varphi(\varphi^{(\alpha-1)}(X))$$

$$iii) \quad \alpha \text{ ガ極限数ナラバ } \varphi^{(\alpha)}(X) = \prod_{\beta < \alpha} \varphi^{(\beta)}(X)$$

スルト明ラカ=  $\alpha < \beta$  ナラバ  $\varphi^{(\alpha)}(X) < \varphi^{(\beta)}(X)$

且ツ  $\varphi^{(\alpha+\beta)}(X) = \varphi^{(\beta)}(\varphi^{(\alpha)}(X))$  デアル。

サテ簡單ノタメ  $\varphi^{(\alpha)}(X) = X^{(\alpha)}$  ト置キ  $X^{(1)} = X^d$  ト置ケバ 孤立数ニ対シテハ  $X^{(\alpha)} = (X^{(\alpha-1)})^d$  デアル。  $X^{(\alpha)}$  ヲ  $X$  ノ  $\alpha$  次ノ *dérivé* ト呼ブコトニシ、特ニ一次ノ *dérivé*  $X^d$  ヲ 單 =  $X$  ノ *dérivé* ト呼ブコトニシヨウ。

次=  $\nabla \in \mathcal{L}$  ニ対シテ

$$\alpha) \quad X < \nabla = X = 0(\nabla)$$

$$\beta) \quad X \cdot \nabla^c = 0(\nabla) \Leftrightarrow X < \nabla(\nabla)$$

$$\gamma) \quad X < \nabla(\nabla) \quad \text{且ツ} \quad \nabla < X(\nabla) \Leftrightarrow X = \nabla(\nabla)$$

ト定義スレバ容易=解ル如ク

Lemme 1.  $X < \nabla(\nabla)$  ナラバ  $X^d < \nabla^d(\nabla^d)$  及ビ

$X < \nabla(\nabla)$  ナラバ  $X^d < \nabla^d(\nabla^d)$  デアル。

( 3 )

サテ 1 ノ *adhérence* 即チ  $1 \cdot I^{ac} = I^{ac}$  ヲ  $E$  ト置クコトニスレバ  $E = X^{ac} \cdot X^{cd}$  ガ任意ノ  $X \in \mathcal{L}$  ニ対シテ成立スル。スルト上ノ定義ヨリ蓋チ=

Lemme 2.  $X^{ac} \subset X^{cd}(E) \quad X \in \mathcal{L}$

Lemme 3. i)  $X^{dcd} \subset X^{cd}(E)$

ii)  $X^{cdcd} \subset X^d(E^d)$

何者, i) ハ  $X^{dcd} \subset X^{cdd}(E^d) \subset X^{cd}(E^d)$

ii) ハ i) = 於テ  $X$  ノ代リニ  $X^c$  ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2'  $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}(E^d)$  <sup>(5)</sup>

Lemme 4  $X^{dc} \subset X^{dcd}(E)$  且ツ  $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^d)$   
 $\subset X^{(\beta)c(\alpha)}(E^d)$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5.  $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明 ;  $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^d) \subset X^{dc(\beta)}(E^d)$

逆ノ不等号ハ  $X^{(\alpha)} \subset X^d \rightarrow X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \rightarrow X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ  $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}(E^d)$  . 然ルニ  $\beta = 1$  ノトキニハ

$E^d \subset X^{dcd}$  ダカラ  $E^d \subset X^{(\alpha)c^d}$  故ニ  $X^{(\alpha)c^d} = X^{dcd}$  ガ成立ス

ル。依ッテ一般ノ  $\beta$  ニ對シテ然リ。 C. g. f. d

Théorème 1.  $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明 ; i)  $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^d) = X^{(\alpha\gamma)}(E^d) \subset X^{(\alpha)}(E^d)$

故ニ  $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$  .  $(E^d)$  ハ Lemma 4 ノ

証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii)  $(X^{(\alpha)c(\gamma)})(\delta)c \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)})(\delta)(E^d) \rightarrow X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c} \subset$   
 $X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)cc}(E^d) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}(E^d)$

依ッテ  $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\beta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$  但シ

コノ  $(E^d)$  モ省クコトヲ得ル。 i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル。 C, g, b, d

サテコノ Théorème = 於テ  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$  ト置ケバ次ノ  
 系ガ得ラレル。

Corollaire  $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ關數ニ關スル C. Kuratowski ノ等式<sup>(6)</sup>ノ導集合ニ於ケル  
 analogue デアル。

Lemme 3. i)  $X^{dcd} \subset X^{cd}(E)$

ii)  $X^{cdcd} \subset X^d(E^d)$

何者, i) ハ  $X^{dcd} \subset X^{cdd}(E^d) \subset X^{cd}(E^d)$

ii) ハ i) = 於テ  $X$  ノ代リニ  $X^c$  ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2'  $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}(E^d)$  <sup>(5)</sup>

Lemme 4  $X^{dc} \subset X^{dcd}(E)$  且ツ  $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^d) \subset X^{(\beta)c(\alpha)}(E^d)$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5.  $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明 ;  $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^d) \subset X^{dc(\beta)}(E^d)$

逆ノ不等号ハ  $X^{(\alpha)} \subset X^d \rightarrow X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \rightarrow X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ  $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}(E^d)$  . 然ルニ  $\beta = 1$  ノトキニハ

$E^d \subset X^{dcd}$  ダカラ  $E^d \subset X^{(\alpha)c^d}$  故ニ  $X^{(\alpha)c^d} = X^{dcd}$  ガ成立ス

ル。依ッテ一般ノ  $\beta$  ニ對シテ然リ。 C. g. f. d

Théorème 1.  $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明 ; i)  $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^d) = X^{(\alpha\gamma)}(E^d) \subset X^{(\alpha)}(E^d)$

故ニ  $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$  .  $(E^d)$  ハ Lemma 4 ノ

証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii)  $(X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c} \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)}(E^d) \rightarrow X^{(\alpha)c(\delta)c(\delta)c} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)c}(E^d) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}(E^d)$

依ッテ  $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\beta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$  但シ

コノ  $(E^d)$  モ省クコトヲ得ル。 i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル。 C, g, b, d

サテコノ Théorème = 於テ  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$  ト置ケバ次ノ系ガ得ラレル。

Corollaire  $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ關數ニ關スル C. Kuratowski ノ等式<sup>(6)</sup>ノ導集合ニ於ケル analogue デアル。

( 4 )

サテ  $X + X^d = X^a$  ト置キ  $X^a$  ヲ  $X$  ノ閉被ト呼ブコトニスル。  
明ラカニ *opération*  $X^a$  ハ (2) ニ於ケル  $\mathcal{Q}$  ノ條件ヲ満足スルノ  
ミナラス

Lemme 6.  $X^{aa} = X^a$  且ツ  $X^{da} = X^{ad} = X^d$   
 $X \subset X^a$ ,  $X^d \subset X^a$  ヨリ明ラカ。次ニ  $\mathcal{Q}$  ト  $d$  トノ關係トシテハ

*Théorème 2.*  $X^{dcd} = X^{dca}(E^a) = X^{acd}(E^a) = X^{aca}(E^a)$

証明； 先ヅ  $X^{dca} = X^{dc} + X^{dcd} = X^{dcd}(E) \dots \dots *$

次ニ  $X^{dcd} \subset X^{cd}(E^d) \subset X^{ca}(E^d)$  <sup>(Lemme 4)</sup> 依ッテ  $X^{dca} = (X^a)^{dcd} \subset$   
 $\subset X^{acd}(E^d) \subset X^{aca}(E^d)$  又他方ニテ  $X^{aca} = (X^c X^{dc})^2 \subset$   
 $\subset X^{dca} = X^{dcd}(E)$ . 故ニ  $X^{dcd} = X^{dca}(E^a) = X^{acd}(E^a) =$   
 $X^{aca}(E^a)$

C. q. f. d.

*Corollaire*  $X^{dcdcd} = \begin{Bmatrix} X^{acdcd} \\ X^{dcacd} \\ X^{acdca} \end{Bmatrix} (E^a) = \begin{Bmatrix} X^{dcaca} \\ X^{acdca} \\ X^{acacd} \end{Bmatrix} (E^a) = X^{acaca}(E^a)$

次ニ  $\mathcal{S}_n$  ナルモノヲ定義シ、ソレハ  $d$  ヨリ始マリ  $c$  及ビ  $d$  ガ交互ニ  
現ハレル有限列デアッテ、ソノ文字ノ総數ガ  $n$  ナルモノトスル。例ヘ  
バ、 $\mathcal{S}_{2n} = dcdc \dots dc$  ( $dc$  ガ  $n$  個),  $\mathcal{S}_{2n+1} = dcdc \dots$   
 $dcd$  ( $dc$  ガ  $n$  個トソノ後ニ  $d$  ガ 1 個)。又  $\mathcal{S}_n =$  於テ  $d$  ノ代  
リニ  $\mathcal{Q}$  テ置換ヘタモノヲ  $\mathcal{P}_n$  ト書ク事ニスル。

*Théorème 3.*  $n \geq 3$  ナルトキ

i) 若シ  $n$  ガ奇數ナラバ  $X^{\mathcal{S}_n} + E \cdot X^{\mathcal{P}_n} = X^{\mathcal{P}_n} + E^d$

ii) 若シ  $n$  ガ偶數ナラバ  $X^{\mathcal{S}_n} + E^d \cdot X^{\mathcal{P}_n} = X^{\mathcal{P}_n} + E$

証明； 先ヅ *Théorème 2* ノ系ヨリ一般ニ  $X^{\mathcal{S}_n} = X^{\mathcal{P}_n}(E^a)$   
ガ成立シテキル。若シ  $n \geq 3$  ガ奇數ナラバ  $X^{\mathcal{S}_n} = (X^{\mathcal{S}_{n-3}})^{dcd}$   
ト書ケルカラ  $E^d \subset X^{\mathcal{S}_n}$  且ツ  $E \cdot X^{\mathcal{S}_n} = 0$ 。依ッテ i) ノ等式  
ガ得ラレタ。

又  $n$  ガ偶數ナラバ (但シ  $n \geq 3$ )、 $E^d \cdot X^{\mathcal{S}_n} = 0$  且ツ  $E \subset X^{\mathcal{S}_n}$

デアル。故= ii)ヲ得ル。 C. g. f. d.

**Théorème 4.** 若シ  $n=4r+1$  又ハ  $n=4r$  ナラバ  $X^{(p)} \subset X^{\sigma_n}(E^a) \subset X^{(r)}(E^a)$  ガ成立スル。但シ  $\beta, \gamma$  ハ任意ノ有限ナル順序数。

**Corollaire**  $X^{cdc} \subset X^{\sigma_n}(E^a) \subset X^d(E^a)$ 。但シ  $n=4r+1$  又ハ  $n=4r$  デアル。

次= C. Kuratowski ノ得タ Table (T)<sup>(7)</sup> = 相當スルモノトシカノニツノ Table ヲ掲ゲル。

【Table 1】:

$$X^{cdc} \subset X^{cdcdcdc}(E^a) \begin{cases} CX^{dcddc}(E^a) \\ CX^{cdcd}(E^a) \end{cases} \begin{cases} CX^{dcddc}(E^a) \\ CX^{cdcdcd}(E^a) \end{cases} CX^d(E^a)$$

【Table 2】

$$X^{dc} \subset X^{dcdcdc}(E^a) \begin{cases} CX^{cdcdc}(E^a) \\ CX^{dcd}(E^a) \end{cases} \begin{cases} CX^{cdcdcd}(E^a) \\ CX^{cd}(E^a) \end{cases}$$

Table 2 ハ (3)ニ於ケル Lemma 2 ヲ詳細ニシタモノデアル。サテ之等ヲ証明シヨウ。

**証明** ; 定理 4 = 依ル  $X^{dcdcd} \subset X^d(E^a)$  ダカラ  $(X^c)^{dc} \subset (X^c)^{dcdcdc}(E^a)$ 。次=  $X^{cdcdcdc} \subset X^{cdcdcdcd}(E) = X^{cdcd}(E) = X^{cdcd}(E)$  即チ  $X^{cdc} \subset X^{cdcdcdc}(E^a) \subset X^{cdcd}(E^a) \subset X^{dcdcd}(E^a) \subset X^d(E^a)$  ガ得ラレタ。又  $(X^{cdc})^{dcdc} \subset (X^d)^{dcdc}(E^a) \subset X^{dcdc}(E^a)$  及ビ Lemma 2 ニヨリ  $(X^{dc})^{dc} \subset (X^{dc})^{dcd}(E^a)$ 。即チ  $X^{cdcdcdc} \subset X^{dcdc}(E^a) \subset X^{dcdcd}(E^a)$  ガ得ラレル。コレデ Table I ハ完成シタ。ソコデ  $X \rightarrow X^c$  デ置換ヘルト Table 2 ガ得ラレル。 C. g. f. d.

(未完)

(註)

(1) C. Kuratowski : sur l'opération  $\bar{A}$  de l'Analyse Situs, Fund. Math. 3 (1922)

- C. Kuratowski ; *Topologie* [. (1933)
- (2) H. Terasaka ; *Die theorie der Topologischen Verbände*, *Fund. Math.* (1939)
- (3) H. Terasaka ; *loc. cit.*
- (4) 後述ノハズ, タトヘバ  
H. Hahn ; *Reelle Funktionen*, (1932)
- (5) コノ章ヲ通シテ  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ハ任意ノ順序数.
- (6) C. Kuratowski ; *loc. cit.*
- (7) C. Kuratowski ; *loc. cit.*

1947. 3. 16.

---