



Title	二次元関集合体ノ上ノ測地線ノ延長
Author(s)	矢島, 猛
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 106-111
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75179
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

4.4. 二次元閉集合体ノ上ノ測地線ノ延長

矢 島 猛 (阪大)

1. $K.Menger$ ニヨレバ *compact* ナ距離空間ガ *convex* (即チ任意ノ二点 a, b ニ対シ少クモ一 c ガ存在シテ $ac + cb = ab$ トナル. 此ノ c キ C ヲ a, b ノ間ノ点ト云ヒ $C \in \overline{ab}$ デ表ハス) ナルトキハ任意ノ二点 a, b ヲ結ブ測地線分 (以下 g, s ト略記スル) $\overline{ab}$ ガ存在シテ其ノ長さハ丁度 $ab =$ 等シイ. 從テ閉集合体上ノ二点 a, b ヲ結ブ $g, s. \overline{ab}$ ヲ延長シテ行フトキハ (c ガ $\overline{ab}$ ノ延長ノ点トハ $ab + bc = ac$ ナルコト) 逐ニ e ナル点ガ存在シテ $\overline{ae}$ ハ延長出来ナイ, 即チ任意ノ x ニ対シ $ae + ex > ax$ トナル. 此ノ点 e ヲ a 又ハ $\overline{ab}$ ノ最遠点ト名付け, スベテノ b ニ対シ $\overline{ab}$ ノ最遠点ノ集合ヲ $E(a)$ デ表ハス.

Complete analytic Riemannian surface ノ上デノ $E(a)$ ノ状態ニ關シテハ孰ニ $S.B. Myers$ ガ *Duke Math. Jour.* vol. I, II ニ種々ノ結果ヲ報告シテ居ル. 以下此ノ問題ヲ距離幾何学的ニ取扱フデミマウ 若クハ併ルトシテ,

- P.1. Ω 二次元閉集合体デ *convex* ナ距離空間
 - P.2. 実数 $\delta > 0$ ガ存在シテ $ab < \delta$ ナラバ $\overline{ab}$ ハ唯一ツ存在スル
 - P.3. 任意ノ g, s ハ右シ延長出来レバ其ノ延長ハ一意ニキマル
即チ P, q ガ $\overline{ab}$ ノ延長ノ点ナラバ $P \in \overline{bq}$ 又ハ $q \in \overline{bP}$ ヲトル.
- P.2, P.3, ハ誌上談話会第3号工藤氏ノ *geodesic space* ノ條件Cト殆ンド同ジデアル. 以下ナルベク工藤氏ト同ジ記号ヲ使フコトニスル. 證明スベキコトハ

定理 $P_1 - P_3$ ヲ満足スル Ω デハ $E(a)$ ハ一次元連結集合デアル

デアルガ 證明ハ長クナルカラ出来ルダケ簡潔ニ述ベル.

2. g, s ノ基本的性質

(2.A) a, b ヲ結ブ g, s ガ二ツアレバ $b \in E(a)$ デアル. 此ノ図形ヲ *slit* ト名付ケル.

(證) ニツノ $g.S$ ヲ $\overline{ab'}$, $\overline{ab^2}$ トシ各々ハ a, b 以外 = 共通点ヲ持タナイトスル. $b \notin E(a)$ トスレバ $\overline{ab'}$ ノ延長ノ点 C ガ存在スル. C ハ $\overline{ab^2}$ ノ延長ノ点デモアル. $P \in \overline{ab'}$, $q \in \overline{ab^2}$ トスレバ P, q ハ $\overline{cb}$ ノ延長ノ点デ且 $P \notin \overline{qb}$, $q \notin \overline{pb}$. 故ニ P, q = 矛盾. 若シ $\overline{ab'}$, $\overline{ab^2}$ ガ共通点ヲ持テバニツノ $g.S$ ハ一致スル. 仮定 = 反ス.

(2.B) $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ ナラバ $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n b_n}$ ハ又 $g.S$ デ $\overline{ab}$ ノ一ツデアル. 特ニ $b \notin E(a)$ ナラバ $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n b_n} = \overline{ab}$ デアル (證略).

(2.C) $\overline{a_n b_n} \rightarrow \overline{ab}$ ナラバ $\overline{a_n b_n}$ ハ最遠点 e_n ハ $\overline{ab}$ ノ最遠点 e 又ハ $\overline{ae}$ ノ間ノ点ニ収斂スル (證略)

3. 近傍

近傍系トシテハスベテ内近傍ヲトル. P ノ ε -近傍ヲ $S(P, \varepsilon)$ デ表ハス. Ω ハ compact ダカラ Euclid 平面ト位相合同ナ有限個ノ近傍ヲ覆ヘル. 従テ $\delta' > 0$ ナル実数ガアツテ $S(P, \delta'/2)$ ハ此ノ近傍系ノドレカニ含マレル. 即チ任意ノ P = 對シ $S(P, \delta'/2)$ ハ Euclid 平面ト位相合同ニナル. 便宜上 $\delta' > \delta$ ト假定シテオク.

次ニ $g.S$ $\overline{ab}$ ノ右側トカ左側トカノ概念ヲ嚴密ニ定義スル必要ガアルガ長クナルカラ省略スル. ε ヲ充分小ニスレバ $S(C, \varepsilon)$ $C \in \overline{ab}$ ハ $\overline{ab}$ = ヨリニツノ部分ニ分ケラレル. 従テ $\overline{ab}$ ノ近傍ニ於テハ右側, 左側ト言フテモ不自然デナイ. a カラ b ノ方向ニ進テ右側, 左側ヲ夫々 $\overline{ab}$ ノ右側, 左側ト言フコトニスル.

4. 三角形ノ内部

三點 a, b, c 及ビ $g.S$ $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ ノナス図形ヲ三角形トイフ. 辺ノ頂点等ノ意味ハ明ラカ. 今 Δabc ガ Ω ヲニツノ部分ニ分ケ辺上ノ二點ヲ結ブ $g.S$ ガ常ニ一方ノ部分ニ含マレルトキ Δabc ヲ正則, $g.S$ ヲ含ム部分ヲ Δabc ノ内部トイフ.

(4A) $\Delta abc \subset S(P, \frac{\delta}{2})$ ナラバ Δabc ハ正則デアル

(證) $S(P, \frac{\delta}{2})$ ハ Euclid 平面ト位相合同デアルカラ Δabc ハ Ω ヲニツノ部分ニ分ケル. $S(P, \frac{\delta}{2})$ = 含マレル部分ヲ (辺ヲ

含マナイ) A , 他方ヲ B トスル. $x \in A =$ ガシ $\overline{ax} \subset A$ ナラバ S ヲ
 A_1 ノ点, $\overline{ax} \cdot B \neq \emptyset$ ナラバ x ヲ A_2 ノ点トスル. $A = A_1 + A_2$.
 A ハ連結ダカラ $H(A_1, A_2) = A_1 A_2 + A_1 \overline{A_2} \neq \emptyset$. $A_1 \overline{A_2} \neq \emptyset$ トスル.
 $x \in A_1$, $x_n \in A_2$ ガアツテ $x_n \rightarrow x$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{ax_n} = a$, x ヲ結
ブ S デ $\overline{ax}$ ト異ナル. $\overline{ax}$ ハ $slit =$ アリ $ax < \delta$ ナルコト =
矛盾スル. 故ニ $A_1 = \emptyset$ スル. $A_2 = \emptyset$. $A_1 A_2 \neq \emptyset$ ナルトキニ同シ.
 $A_1 = \emptyset$ トスル. $\overline{ax}$ ($x \in A$) ハ必ズ $\overline{bc} =$ 交ハルカラ $ax \geq \frac{\delta}{2}$ トナ
リ矛盾. 故ニ $A_2 = \emptyset$. 従テ $\overline{ax} \subset A$. 極限ヲ考ヘルト $x \in \overline{bc}$ ノキニ
同ジコトガ言ヘル. $\overline{bx} \subset A$, $\overline{cx} \subset A$ ナルコトモ同様ニ言ヘル. 次ニ
 $\triangle abc$ ノ辺上ノ二点 d, e ヲトル. $d \in \overline{bc}$, $e \in \overline{ab}$ トスル.
 $\triangle abd =$ ツイテ $\triangle abc$ ト同ジコトヲ考ヘ $A =$ 相当スル部分ヲ A' ト
スレバ $\overline{de} \subset A' \subset A$. (證終)

次ニ $\triangle abc =$ 於テ $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ 上ニ P_i, q_i ヲトリ $\frac{ap}{ab} = \frac{aq}{ac}$ トスル
トキ $\overline{pq}$ ヲ $\triangle abc$ ノ $Q =$ 対スル経線, 其ノ長サノ上限ヲ " $Q =$
対スル幅" ト名付ケル. 又 $x \in \overline{bc}$ ト Q ヲ結ブ S ヲ " $Q =$ 対スル
経線" ト名付ケル. 若シ $\triangle abc$ ガ Ω ヲ二ツノ部分ニ分ケ $Q =$ 対ス
ル経線ガ其ノ一方ノミニ含マレルトキ其ノ部分ヲ " $Q =$ 対スル内部"
トイヒ, $Q =$ 対スル経線ガ $Q =$ 対スル内部ノミニ含マレルトキ $\triangle abc$
ヲ基本三角形ト名付ケル. 以後 間速ヒヲ忘サナイトキハ " $Q =$ 対スル"
ヲ省ケ.

(4.B) $\triangle abc =$ 於テ $Q =$ 対スル幅ガ $\frac{\delta}{4}$ ヨリ小ナラ $Q =$ 対スル
内部ガアル.

(證) $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ ヲ経線 $\overline{p_i q_i} =$ ヨリ細分シ $p_i p_{i+1} < \frac{\delta}{4}$, $q_i q_{i+1} < \frac{\delta}{4}$ トスル. $\triangle p_i p_{i+1} q_i$, $\triangle q_i p_{i+1} q_{i+1}$ ハ夫々 $S(p_i, \frac{\delta}{2})$,
 $S(q_i, \frac{\delta}{2}) =$ 含マレルカラ正則ニナリ従テ内部ガアル. 各三角形
ノ作り方カラ $\triangle abc$ ハ Ω ヲ二ツノ部分ニ分ケル. 経線ガ其ノ一
方ニ含マレ且ソレガ $\triangle p_i p_{i+1} q_i$ 等ノ内部ト一致スルコトハ, 四辺
形 $p_i p_{i+1} q_{i+1} q_i$ ガ $\overline{p_{i+1} q_i}$ ノ中点ヲ中心トスル半径 $\frac{\delta}{2}$ ノ円内
ニ含マレルコトカラ, $\overline{p_i p_{i+1}}$ 上ノ点ヲ (4.A) ノ Q 点, 四辺形ノ

内部ヲAト考ヘルコトニヨリ (4.A)ト全ク同様ニシテ得ラルル。

(4.C) $\triangle abc$ ニ於テ a ニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナラ (i) 内部ノ各点ヲ通リ少クモ一ツノ線線ガアル。(ii) ニツノ線線ハ共通点ヲ持タナイ。

(證) 内部ノ点 e ヲ通ル線線ガ存在シナイトスル。線線 $\overline{pq}$ ヲ引キ e ガ $\triangle opq$ ノ内部ニアレバ P ヲAノ点, 外部ニアレバBノ点トスル。H(A,B)ノ論法ヲ使ヘバ e ヲ中ニ含ム $\overline{pq}$ ガ出テフル。幅ガ $\delta/4$ ヨリ小サイコトニ矛盾。(ii)ハニツノ q, s ガ共通点ヲ持テバ交ハルコトガラ容易ニ出ル

5. ノヨイヨ最初ノ定理ノ証明ヲスル。ソノ前ニ予備定理ヲニツ掲ゲル。

予備定理 1. $\triangle abc$ ハ a ニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナル基本三角形トスル。内部ニ $e \in E(a)$ ガアレバ $\overline{bc}$ 上ニモ $f \in E(a)$ ガアツテ e, f ハ $E(a)$ ノ連続曲線ヲ結バレル

(証) e ヲ通ル線線ヲ poq_0 トシ, $x \in bc$ ト a ヲ結ブ q, s, ax ヲ引ケバ必ズ $\overline{poq}$ 又ハ $\overline{eq_0}$ ノ間ノ点ヲ通ル $\overline{poq}$ ヲ通レバ x ヲAノ点, $\overline{eq_0}$ ヲ通レバBノ点トシテ H(A,B)ノ論法ヲ用フレバ $f \in \overline{bc}$ ガアツテ $\overline{af}$ ハニツアリ $\overline{af}$ ニナル。故ニ $f \in E(a)$ 。コノコトハ任意ノ線線ニツイテ言ヘル。即チ任意ノ線線 $\overline{pq}$ 上ニ $r \in E(a)$ ガアリ, $\overline{ar}$ ハニツアツテ一方ハ $\overline{p_1e}$, 他方ハ $\overline{eq_0}$ ニ交ハル。夫々 $\overline{ar}^1, \overline{ar}^2$ トスル。 r ガ連続ナルコトハ $\overline{p_1q_1} \rightarrow \overline{pq}$ ナルトキ $q_1 \rightarrow q$ トスレバ $r \in E(a)$ デ $\overline{ar}$ ガニツアルコトヲ言ヘバヨイ。ソレハ $\overline{ar_1^1} \rightarrow \overline{ar}^1, \overline{ar_2^2} \rightarrow \overline{ar}^2$ トスレバ $\overline{ar}^1, \overline{ar}^2$ ハ共ニ a, r ヲ結ブ q, s デ相異なる。故ニ $r \in E(a)$

予備定理 2. $b \in E(a)$ トシ C_i ハ $\overline{ab}$ ノ間ノ点 C ニ収斂スル $E(a)$ ノ点列トスル。シカラバ C_i ト $E(a)$ ノ連続曲線ヲ結バレル点列 b_i ガアツテ $b_i \rightarrow b$ トナル

(証) C_i ハスベテ $\overline{ab}$ ノ左側ニアルモノトシテモ一般性ヲ失ハナイ

(1) $\overline{ab}$ ノ左側カラ $a_i \rightarrow C$ トナル点列 a_i ヲ適當ニトレバ $\overline{aa_i}$

ノ最遠点 e_i ハ b = 収斂スル。何處、 a_i 如何ニトツテモ b = 収斂シ
 ナイトスル。 e_i ハ $(2.C)$ = ヨリ $\overline{ab}$ ノ間ノ点 = 収斂スル。ソノヤウ
 ナ点ノ上限ヲ $\bar{e}$ トスル。 $\bar{e}$ ト b ノ間ノ点 f = 左側カラ収斂スル点列 f_i
 フトレバ $\overline{af_i} \rightarrow af$ トナル $(2.B)$ 。 故ニ $\overline{af_i}$ ノ間ノ点ヲ左側カ
 ラ C = 収斂スル点列ガアル 矛盾。 次ニ $\overline{ad_i} \rightarrow \overline{ac}$, $\overline{d_i e_i} \rightarrow \overline{cb}$,
 故ニ $\overline{ae_i} \rightarrow \overline{ab}$ 。 シ充分大ニスレバ $\Delta a b e_i$ ノ a = 対スル隅ハ正角
 ニ小ニナルカラ内部ガアル。 又 $C_i \rightarrow C$ ダカラ $\Delta a b e_i$ ノ内部 =
 C_i ガアル。 改メテ C_i ト書ク。

(2) $\Delta a b e_i$ = 於テ線段 $p q$ ヲ充分小ニ近クトレバ $\Delta a p q$ ハ正則、
 従テ基本三角形デアル。 今 $\Delta a p q$ ガ基本三角形ニナルヤウナ $\overline{p q}$ ノ
 上限ヲ $\overline{p_i q_i}$ トスル。 $b_i \in E(a)$ ガ $\overline{p_i q_i}$ ノ上ニアツテ b_i ト C_i トハ
 $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレル。

(3) $\overline{p_i q_i} \neq \overline{b e_i}$ ナラバ $\overline{p_i q_i}$ ノ内部ニスルヤウナ $\Delta a p_i q_i$
 ($\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{p_i q_i} = \overline{p q}$) ヲ作レバ基本三角形デナイカラ $\Delta a p_i q_i$
 外部ニアル経線 $\overline{ax_i}$ ガアル。 従テ $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{ax_i} = \overline{ax}$ ハ $\Delta a p q$
 ノ外部ニアル。 $\Delta a p_i q_i$ ノ内部ニアル $\overline{ax_i}$ ニ存在スル。 故ニ $x_i \in E(a)$
 シカシ x_i ト b_i ハ $E(a)$ ノ部分集合デ結バレルカラカハ不明デアル。

(4) $i \rightarrow \infty$ ナルトキ $\overline{p_i q_i} \rightarrow b$ デアル。 何處 否ニ然ラズトスレバ
 x_i ノ極限ハ又 $E(a)$ ノ点デアルカラ $\overline{ab}$ ノ間ノ点デ $E(a)$ = 属スル
 モノガアル 矛盾。 故ニ $\overline{p_i q_i} \rightarrow b$ 従テ $b_i \rightarrow b$ 。

定理ノ証明

$E(a)$ ハ連結集合デナイトスル。 $E(a) = E_1 \cup E_2$
 $E_1 \neq \emptyset$, $E_2 \neq \emptyset$, $H(E_1, E_2) = \emptyset$ ト出来ル。 $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ トシ
 テ $\overline{e_1 e_2}$ ヲ作ル。 $\overline{e_1 e_2}$ ノ間ノ点ヲ A, B ニ組ニ分ケテ $x \in A$ ナラバ
 $\overline{ax}$ ノ最遠点ハ E_1 = 属シ。 $x \in B$ ナラバ E_2 = 属スヤウニスル。

$\overline{e_1 e_2}$ ハ連結集合ダカラ $H(A, B) \neq \emptyset$ 。 $\overline{AB} \neq \emptyset$ トスル。 $x \in A$, $x_n \in B$,
 $x_n \rightarrow x$ トナル点列ガアル。 $\overline{ax}$ ノ最遠点ヲ b , $\overline{ax_i}$ ノ最遠点ヲ C_i
 トスレバ仮定ニヨリ $C_i \rightarrow b$ デナイカラ $(2.C)$ = ヨリ $\overline{ab}$ ノ間ノ点 = 収斂
 スル。 シカシ 予備定理 2 = ヨリ $b_i \in E(a)$ ガアツテ C_i ト b_i ハ $E(a)$ ノ
 連続曲線デ結バレルカラ $b_i \in E_2$ 。 且 $b_i \rightarrow b$ 。 矛盾。

次= $E(a)$ ハ連結集合タカラ $\dim E(a) \neq 0$. 又 $E(a)$ ハ Ω ノ開集
 合ヲ含マナイカラ $\dim E(a) \leq 1$. 故= $\dim E(a) = 1$.

—1947. 4. 23—