



Title	R がcompact な空間で $R \times R$ がさうでない例
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 111-114
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75180
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

45. R が *Compact* な空間で $R \times R$ が そうでない例

(阪大) 寺 阪 英 孝

bicomact (以下、完閉ト読ス) な空間の積空間が完閉なことは周知であるが、單に *compact* (以下 $\mathcal{K}_0$ 完閉と読ス) な空間、即ち可附番無限集合が必ず集積点をもつ、といふ空間の積も矢張り $\mathcal{K}_0$ 完閉なのだろうか？ と阪大の大阪君が疑問を提出されたので “ $\mathcal{K}_0$ 完閉ではないのですか？” と反問したら “第一可附番公理があれば明かなのです” とのこと。成程、第一可附番公理がないと、どうやら簡単には分らないらしい。そこで造って見たのが 表題の “ R は $\mathcal{K}_0$ 完閉だけれども、 $R \times R$ は $\mathcal{K}_0$ 完閉でない” 添である。こんなことは夙に知られてゐるに違ひないと思はれるが、御参考までに報告したい。……尚 此の例からも考へられるように、何事かの意味で可附番公理も伴はない $\mathcal{K}_0$ 完閉性は不自然である。

R の造り方は、筆者がずっと以前、東の表現を考へてゐるとき取組んでゐた空間を模倣がへしたものである。基数を制限されてゐるから、以下 証明は一切省いて極く簡略に述べる。

§1. 0 と 1 とからなる $0110 \dots$ の如き数列

$$a = (a^1 a^2 \dots a^n \dots) \quad a^n = 0 \text{ 又は } 1$$

の中、1 が無限に多く現はれるものを全部考へ、これ $\in A$ とする。

次に 1 が ただ有限しか現はれないものをも許したとし、二つの a, b :

$$a = (a^1 a^2 \dots a^n \dots), \quad b = (b^1 b^2 \dots b^n)$$

は有限個を除き殆んど凡ての n につき $a^n = b^n$ ならば $a = b$ であると定め、又 a^n と b^n との中 大なる方を c^n としたとき

$$c = (c^1 c^2 \dots c^n \dots)$$

を以て $a \cup b$ と定義し、同様に a^n と b^n との中 小なる方に

よつて $a \vee b$ を定義すれば、Boolean代数が得られることは既知である。

今 A の元の集合 $\{a_\lambda\}$ があつて

(i) $\{a_\lambda\}$ の どの有限個の元をえらんでも交りが 0 でなく

(有限交叉性)

(ii) 而も $\{a_\lambda\}$ に A の他の元を附加すると (i) の性質が破れる

(最大性) のとき

かかる $\{a_\lambda\}$ を 素イデアルと云ふ。すると

I. $\langle$ 素イデアル $\{a_\lambda\}$ の組成元 a_λ の数は濃度である $\rangle$

(A の元 a とその補元 a' は、いずれか一方が $\{a_\lambda\}$ に属し、他が属さないことが言へるので、それから適ぐ I. が出る)

II. $\langle A$ の異なる素イデアルの数は濃度 $2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$ である $\rangle$

(I. によつて素イデアル $\{a_\lambda\}$ の組成元 a_λ の数は $\mathfrak{c}$ であるから、この元を整列させておいて、適當に順序よく考へると、異なる組合の数が $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ であることが分つて、II. が証明される)

III. $\langle P = \{a_\lambda\}$ を素イデアルとし、各の a_λ は $a_\lambda = (a'_\lambda, a_\lambda^2, \dots, a_\lambda^{\mathfrak{c}-1}, \dots)$ だとする。このとき各項 $a_\lambda^{\mathfrak{c}}$ を一つづつ右にづらせたもの：

$$a'_\lambda = (a_\lambda^0, a'_\lambda, a_\lambda^2, \dots, a_\lambda^{\mathfrak{c}-1}, \dots) \quad (\text{但し } a_\lambda^0 \text{ は } 0, 1 \text{ の値})$$

を考へると $\{a'_\lambda\}$ は又素イデアルになる $\rangle$

$P = \{a_\lambda\}$ に対して $\{a'_\lambda\} \in P'$ で表はすことにする。

次に求むる空間 R の母体たる空間 R^2 を次のように定める。

先づ $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ なる可附番個の異なる点を考へ、これを R^2 の孤立点とする。

次に R^2 の残りの点を定義するのであるが、まづ $g_1, g_2, \dots$ の無限部分集合を考へてみると、この部分集合に対しては A の元 $Q = (a'_1, a_1^2, \dots)$ が 一対一に対応せしめられる。即ち g_n がその部分集合に属してゐれば $Q^n = 1$ とし、然らざれば $Q^n = 0$ とすれば

そこで今 A の凡ゆる素イデアル $P = \{a_\lambda\}$ を考へてこれを R^* の残りの点と定め、 A の元 a を含むような凡ゆる素イデアル $P = \{a_\lambda\}$ 及び a に対応する $g_1, g_2, \dots$ の点を以て近傍と定義すれば、これで R^* が近傍空間として定義されたことになる。

R^* は完閉空間であることが証明出来る。

§3. R^* を基にして R をつくろう

その爲先づ $g_1, g_2, \dots$ の無限部分集合を全部考へると、これには A の各数列 Q が対応するから、濃度は $\mathfrak{f}$ である。数列 $Q = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_\lambda^1, \dots)$ に対応する $g_1, g_2, \dots$ の集積点は Q を含む A の素イデアルに外ならないから、その数は濃度 $\mathfrak{f}$ である。更に R^* の $g_1, g_2, \dots$ 以外の可附番無限集合 $P_1, P_2, \dots$ の集積点も、小生の *Über die Darstellung der Verbände* (Proc. Imp. Acad. 74 (1938), 306-11) の方法を用ひると、矢張り $\mathfrak{f}$ 個あることが分る。

すると R^* の可附番無限集合の異なるものは $\mathfrak{f}$ 個である。そこで $\omega_{\mathfrak{f}}$ を濃度 $\mathfrak{f}$ なる順序数の始数とし、 R^* 中の $g_1, g_2, \dots$ 以外の点 p_λ 、及び R^* の凡ての可附番無限集合 M_λ を $\omega_{\mathfrak{f}}$ の同型に整理させる。

$$P_1, P_2, \dots, P_\lambda, \dots \quad (\lambda < \omega_{\mathfrak{f}})$$

$$M_1, M_2, \dots, M_\lambda, \dots \quad (\lambda < \omega_{\mathfrak{f}})$$

- (1) M_1 の集積点の中、 P_λ の列で最初に現はれるものを p_ν とし、これを P 類の点と呼ぶ。§I の III によつて p_ν も亦 R^* の点であるが、これを P' 類の点と呼ぶ。... P_i に更に $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots$ を施した $(p_\nu)' = p_\nu'$ を P 類の点と呼び、一般に $p_\nu^{\mathfrak{n}}$ を ($\mathfrak{n}$ が負のときも適当に考へ) 定義して $\mathfrak{n} = \text{偶数}$ なら P 類、 $\mathfrak{n} = \text{奇数}$ なら P' 類とする。(入) 一般に $\mu < \lambda$ なる μ につき P 類の点と P' 類の点が定義されたとき、 M_λ を考へ、 M_λ の集積点の中、既に P 類及び P' 類として選ばれなかつた p_λ で最初のものを p_ν とし、 p_ν, p_ν' 等を造つて前同様に P 類の点、 P' 類の点を定める。

かようにすると P_λ の点は P 類が P' 類かの いづれかに所属せしめられることとなる。そこで $q_1, q_2, \dots$ 及び P 類の P_λ 点からなる R^* の部分集合を考へ、これを以て空間 R とする。すると R が求むる空間である。

何者、第一 R は $\mathfrak{B}_0$ 完閉であるし、第二に $R \times R$ を (x, y) ($x \in R, y \in R$) なる 対で表はしたとき、 $(q_1, q_2), (q_3, q_4), (q_{2n-1}, q_{2n}), \dots$ なる点列は集積点をもたぬことが証明されるから。 (以上)

1947. 4. 26.