



Title	永尾氏の談話31に関連して
Author(s)	中村, 正弘
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 115-117
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75182
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

47. 永尾氏の談話 31 に関連して

(阪大) 中 村 正 弘

永尾氏は談話 31 (第4号) で, Remak-Schmidt の定理が Fitting の形で有限次元の modular 束でも成立することを証明されましたが, その証明を幾分簡単に出来る様になりますので, 以下述べさせていただきます。

1. L を有限次元の M 束, α が L から L への作用素で,

$$[1.1] \quad 1^\circ \quad 0_\alpha = 0, \quad 2^\circ \quad (x \cup y)\alpha = x\alpha \cup y\alpha, \quad 3^\circ \quad (x\alpha)\alpha = x\alpha$$

$$[1.2] \quad \alpha \text{ は } 1/a' \text{ より } a/o \text{ への同型写像である.}$$

を満たすとき *normal idempotent join-endomorphism* (略して *nije*) と呼ぶことにします。ただし, 1.2 で a/o と書いたのは $b \leq x \leq a$ を満たす x の元の作る L の部分束の意味です。1.2 に出て来る a, a' は α を与えれば定まりますので, α に伴う元として *nije* に対応したローマ字で表すことにします。1.1 と 1.2 とから, 次のことはほとんど明らかです。

$$[1.3] \quad 1^\circ \quad x \leq y \rightarrow x\alpha \leq y\alpha, \quad 2^\circ \quad x \leq a' \Leftrightarrow x\alpha = 0, \\ 3^\circ \quad x \leq a \Leftrightarrow x\alpha = x.$$

$$[1.4] \quad a \cup a' = 1, \quad a \wedge a' = 0.$$

1.4 の前半は α が $1/a'$ より a/o への同型, つまり一対一対応であることと, $(a \cup a')\alpha = a\alpha \cup a'\alpha$ によつて $a \cup a'$ が a に対応することから, また後半は 1.3.2 と 1.3.3 を $a \wedge a'$ が同時に満たす元であることからわかります。

1.4 によつて $\% \alpha'$ と $\% \alpha$ の間には第二同型定理が成立します。
 G. Birkhoff の本の定理 3.3 によつて, $x \rightarrow x \cup \alpha'$, $y \rightarrow y \cap \alpha$ は
 両者の可逆同型対応となります。ところが, 1.3.3 によつて,

$x\alpha = (x \cup \alpha)\alpha = (x \cup \alpha')\alpha \cap \alpha \subseteq ((x \cup \alpha') \cap \alpha)\alpha = (x \cup \alpha') \cap \alpha$
 が成立しますから, 1.2 と 1 が有限次元であることと, $y \rightarrow y \cap \alpha$ が
 $\% \alpha'$ より $\% \alpha$ への同型であることより

1.5 補題 α が $n_{ij} \in$ のときそのときのみ 1.4 の α, α' により
 $x\alpha = (x \cup \alpha') \cap \alpha$ と表示出来る。

さて, 次に

(1.6) $1 = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_r$, $\{\alpha_i\}$ が独立
 のとき 1.6 を **直分解** と呼びます。このとき,

(1.7) $x\alpha_i = (x \cup \alpha_i') \cap \alpha_i$, $\alpha_i' = \bigvee_{i \neq j} \alpha_j$
 で定まる α_i を 1.6 に伴う n_{ij} と名付けます。 α_i の独立性から
 $1\alpha_i \alpha_j = 0$ ですから, 次の性質があります。

(1.8) 1° $1\alpha_i \alpha_j = 0$, 2° $x \subseteq 1\alpha_i \rightarrow x\alpha_i = x$, 3° $1 = \bigvee_{i=1}^r 1\alpha_i$
 ところが逆に:

1.9 補題 1.1 を満す α の作用素間には 1.8 が成立するなら
 ば, 1.8.3 は直分解を与える。

証: $\alpha_i = 1\alpha_i$, $\alpha_i' = \bigvee_{i \neq j} \alpha_j$ とすれば, 1.8.2 より

$\alpha_i \cap \alpha_i' = (\alpha_i \cap \alpha_i')\alpha_i = (1\alpha_i \cap \bigvee_{i \neq j} 1\alpha_j)\alpha_i \subseteq 1\alpha_i \cap \bigvee_{i \neq j} 1\alpha_j \alpha_i = 0$
 となりますから $\{1\alpha_i\}$ は独立となります。従つて 1.8.3 は一つの直
 分解です。

2. 永尾氏の前記の談話 31 の定理 11 と 12 を証明します。

2.1 定理 二つの直分解

$$1 = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_r = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_s$$

が共通の細分解を持つとき, そのときのみ それらに伴う $n_{ij} \in$ の間に
 $1\alpha_i \beta_j = 1\beta_j \alpha_i$ が成立つ

証: 必要性: ここで共通の細分解であるとは, 第3の直分解
 $1 = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_t$ が存在して, γ_i によつて α_i, β_j が直分解表示

を持つ事を意味します。従って $\{c_i\}$ は Boole 束 B を作り、 a_i と b_j を B に含みます。 B 内では配分率が成立しますから、1.5 によって

$$|a_i \beta_j = (a_i \cup b_j) \cap b_j = a_i \cap b_j = |\beta_j a_i$$

充分性： $\gamma_k = a_i \beta_j$ と置けば、 γ_k について 1.1.1, 1.1.2, 1.8.1, 1.8.3 が成立することは明らかです。また仮定から、

$$|\gamma_k = |a_i \beta_j \cap |\beta_j a_i = a_i \cap b_j$$

が成立しますから、 $x \gamma_k \leq a_i \cap b_j$ がすべての x について成立します。ところが $x \leq a_i \cap b_j$ となる x については 1.3.3 によって $x \gamma_k = x$ ですから、1.1.3 と 1.8.2 とが成立します。従って 1.9 によって $1 = \vee_k \gamma_k$ は直分解となります。その上、 a_i または b_j の任意のものについて、例へば

$$a_i = |a_i = (\vee_k \gamma_k) a_i = \vee_j |\beta_j a_i$$

が成立しますから、これが a_i と b_j に共通な細分解を与えます。

2.2 定理 1.6 が他の任意の直分解について細分解を与えるならば、またそのときに限り $a_i \beta \leq a_i$ が任意の n 個の β について成立つ。

証： 必要性： β に伴う分解を $1 = b \cup b'$ とすれば、仮定によって 1.6 と細分解出来ることとなりますので、2.1 の必要性の証明と同じ様に、 b, b', a_i を含む Boole 束が存在しますから、

$$a_i \beta = (a_i \cup b') \cap b = a_i \cap b \leq a_i$$

充分性： 2.1 の二つの直分解が与えられたとします。

また仮定より、
$$|a_i \beta_j = a_i \cap b_j$$

が成立しますから、2.2 の充分性の証明と同じに 1.1, 1.8 の成立が $\gamma_k = a_i \beta_j$ についていえます。従って 1.9 によって $\{\gamma_k\}$ は直分解を与えます。これが細分解であることの証明は次元を考へる必要がありません。その部分では永尾氏の証明と同じです。

1947.5.6