OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Lie環のCartan分解について
Author(s)	松島, 興三
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 120-123
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75184
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

49. Lie 環の Cartan 分解について

松島與三 (名大)

Killing, Cartan 以来 Lie 環の研究に於て、正則元による Lie 環の固有空間への分解が重要な役割を演じてゐる。$\mathfrak{L}$ を複素数体上の Lie 環、t をその1つの正則元とする。$[t, x] = D_t x$ とおき、$\mathfrak{L}$ を1次変換 D_t の固有空間の直和に分解する。このとき D_t の固有値 0 に対応する固有空間 $\mathfrak{L}_0$ は正則元 t をふくむ極大巾零部分環であり、0以外の固有値に対応する固有空間を、もし必要であれば、更に分解し、結局次の様な $\mathfrak{L}$ の分解が得られる。

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{L}_\beta + \cdots\cdots$$

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] \subseteq \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}.$$

ここに $\mathfrak{L}_0$ の任意の元 h は $\mathfrak{L}_\alpha$ で唯1つの固有値 $\alpha(h)$ をもつ。$\alpha, \beta, \cdots\cdots$ を根値とよぶ。$\mathfrak{L}_0$ の次元を l とすれば $\alpha, \beta,$ は l 個の変数 $\lambda_1, \cdots\cdots \lambda_l$ の1次型式と考へられる。

$\mathfrak{L}$ の他の正則元 t' から出発すれば、$\mathfrak{L}$ の別の分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0' + \mathfrak{L}_{\alpha'}' + \mathfrak{L}_{\beta'}' + \cdots\cdots$$

が得られる。

$\mathfrak{L}$ が半単純の場合、これら2つの分解に出てくる、正則元をふくむ極大巾零部分環（この場合は可換になるが）は $\mathfrak{L}$ の内部同型により互にうつること、すなはち、$\mathfrak{L}_0' = \sigma\mathfrak{L}_0$ なる内部同型 σ があることが Cartan により示された。又 Gantmacher は、この定理に Cartan のより もつとわかりやすい證明を与へてゐる。[1] こゝでは上のことが $\mathfrak{L}$ が半単純でなくても 一般の Lie 環で成立つことを証明したい。

$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{L}$ に対応する Lie 群とする。$a \in \mathfrak{L}$ とするとき、a を単位元に於ける切線 vector とする様な one parameter subgroup を $\exp ta$ とかくことにしやう。

$\mathfrak{L}$ の1つの basis を $a_1, \cdots\cdots a_r$ とし、$a = t_1 a_1 + \cdots\cdots$

$+t_r a_r$ とし $(t_1 \cdots\cdots t_r)$ が $(0 \cdots\cdots 0)$ に十分近いとき.
$\exp(a) = \exp(t_1 a_1 + \cdots\cdots + t_r a_r) \in \mathfrak{G}$ が定義される。
$t_1 \cdots\cdots t_r$ は $\exp(a)$ の Canonical parameter である。
$\mathfrak{h}_\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{H}$ の部分環とするとき $\mathfrak{h}$ に対応する $\mathfrak{G}$ の部分群を $\exp \mathfrak{h}_\mathfrak{g}$ とかくことにする。 $\exp(ta)$ を $\mathfrak{G}$ の元 g で transform すれば、新しい one parameter subgroup $\exp(ta')$ を得る。 $a \to a'$ は $\mathfrak{L}$ の同型対応 A_g を与へる これを この内部同型とよぶ。

今、 $g = \exp a$ とすれば、 $A_g = \exp Da$ とかける。 ただし $Da\, x = [a, x]$, $x \in \mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ を A_g で固有空間に分解する。

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_\rho + \cdots\cdots$$

但し、 $\mathfrak{k}_1$、 $\mathfrak{k}_\rho \cdots\cdots$ は A_g の固有値 $1, f, \cdots\cdots$ に対応する固有空間とする。 そのとき A_g が同型対応であるから $\mathfrak{k}_1$ は部分環をつくる

補題　u が $\mathfrak{G}_\mathfrak{g}$ の単位元の近傍を うごくとき.

$\{ u^{-1} g \exp \mathfrak{k}_1 u \}$ は g のある近傍をふくむ

(証)

$\mathfrak{k}_1 = (a_1 \cdots\cdots a_s)$, $\mathfrak{k}_\rho + \cdots\cdots = (a_{s+1} \cdots\cdots a_r)$ とする.

$g^{-1} \exp(-(t_{s+1} a_{s+1} + \cdots\cdots + t_r a_r)) g \exp(t_1 a_1 + \cdots\cdots + t_s a_s) \cdot \exp(t_{s+1} a_{s+1} + \cdots\cdots + t_r a_r) = \exp(p_1 a_1 + \cdots\cdots + p_r a_r)$ とおくとき、 $p_1 \cdots p_r$ は t_i の analytic function である。 $\exp(\Sigma p_i a_i)$ が 単位元の近傍をふくむことがよい。

これには、函数行列式 $\frac{\partial(p_1 \cdots p_r)}{\partial(t_1 \cdots t_r)}$ が $t_i = 0$ で 0でないことがいへればよい。

$1 \leqq j \leqq s$ のとき $\left(\frac{\partial p_i}{\partial t_j}\right)_{t=0}$ を考へやう.

$t_i = 0 (i \neq j)$ とおけば

$\exp(p_1 a_1 + \cdots\cdots + p_r a_r) = \exp(t_i a_j)$ であるから.

$p_i(0 \cdots t_j \cdots\cdots 0) = \delta_{ij} t_j \quad 1 \leqq j \leqq s$

故に $\left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right)_{t=0} = \delta_{ij} \qquad 1 \leq j \leq s$

次に $s+1 \leq j \leq r$ の場合. $t_i = 0 \quad i \neq j$ とおけば

$$g^{-1}\exp(-t_j a_j)\, g\, \exp(t_j a_j) = \exp(-t_j A_g(a_j))\exp(t_j a_j)$$
$$= \exp(p_1 a_1 + \cdots + p_r a_r)$$

であるから. $t_j = 0$ と微分することにより

$$(1 - A_g)a_j = \left(\frac{\partial P_1}{\partial t_j}\right)_{t=0} a_1 + \cdots + \left(\frac{\partial P_r}{\partial t_j}\right)_{t=0} a_r$$

しかるに $1 - A_g$ を $p + \mathfrak{k}_r + \cdots = \{a_{s+1} \cdots a_r\}$ をそれ自身にうつし. しかも. そこで. non-singular であるから.

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial t_j}\right) = \cdots = \left(\frac{\partial P_s}{\partial t_j}\right) = 0 \qquad s+1 \leq j \leq r$$

$$\det\left(\left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right)_{t=0}\right)_{s+1 \leq i,j \leq r} \neq 0$$

故に $$\frac{\partial(P_1 \cdots P_r)}{\partial(t_1 \quad t_r)_{t=0}} \neq 0 \quad \text{である}$$

以上

$a_1, \cdots, a_r$ を $\mathfrak{L}$ の 1つの basis とし. $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$, $b = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_r a_r$ を 2つの正則元, a, b をふくむ極大可換部分環を夫々 $\mathfrak{h}_a$, $\mathfrak{h}_b$ としやう。まず. a, b の parameter $(\lambda), (\mu)$ が十分近ければ. $A_u \mathfrak{h}_a = \mathfrak{h}_b$ なる内部同型 A_u が存在することを證明しやう。十分小さい正数 ξ をえらんで. $D_{\xi a}$, $D_{\xi b}$ が $2\pi\sqrt{-1}$ の整数倍である様な固有値をもたない様に出来る. ξ が小さければ. $\exp(\xi a)$, $\exp(\xi b)$ が定義される。

$\exp(\xi a) = g$. $\exp(\xi b) = h$ とおかう。

A_g で $\mathfrak{L}$ を分解し $\mathfrak{L} = \mathfrak{k}_1 + \qquad$ とすると. $A_g = \exp D_{\xi a}$ で. $D_{\xi a}$ は $2\pi\sqrt{-1}$ の整数倍である様な固有値をもたないから $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{h}_a$ である.

従つて. u が單位元の近傍をうごくとき. $\{u^{-1} g \exp \mathfrak{h}_a u\}$ は g の近傍をふくむ。しかるに $g \exp \mathfrak{h}_a \leq \exp \mathfrak{h}_a$ であり. (μ) が (λ) に十分近ければ. h は g に十分近いのであるから.

$$h = \exp \xi b \in u^{-1} \exp \mathfrak{h}_a\, u = \exp A_u \mathfrak{h}_a$$

次に a, b を任意の正則元としやう。 $\mathfrak{L}$ の Killing の方程式を

$|tE-(\xi_1 D_{a_1}+\cdots+\xi_r D_{a_r})| = t^r+\psi(\xi)t^{r-1}+\cdots+\psi_{r-1}(\xi)t+\psi_r(\xi)$

とするとき 正則元は $\psi_{r-k}(\xi_1,\cdots,\xi_r)\neq 0$ なる parameter の値に対応する元であり、又正則でない元は $\psi_{r-k}(\xi_1,\cdots,\xi_r)=0$ なる parameter に対応するから、正則でない元全体は超曲次元が1より少くとも1つすくない manifold をつくる。従って正則元全体は連結開集合である。故に任意の2つの正則元 a, b は正則元の中で、連続曲線でむすぶことが出来る。Curve 上の各点 C に、$\alpha \in \mathfrak{U}_C \to f_\alpha = A_u f_C$ となる様な近傍 $\mathfrak{U}_C$ を対応させて Curve をおほふ。そのとき、Curve の finite covering $\mathfrak{U}_{C_0}, \mathfrak{U}_{C_1}, \cdots\cdots, \mathfrak{U}_{C_m}$ $C_0=a$, $C_m=b$ をえらび、$C_i \in \mathfrak{U}_{C_{i-1}}$ なる様にとる。

そのとき、$A_{u_0} f_{C_0} = f_{C_1}$, $A_{u_1} f_{C_1} = f_{C_2}$, $\cdots\cdots$, $A_{u_{m-1}} f_{C_{m-1}} = f_{C_m}$ なる、内部同型 $A_{u_0}, A_{u_1}, \cdots\cdots A_{u_{m-1}}$ が存在する。

$A = A_{u_{m-1}} A_{u_{m-2}} \cdots\cdots A_{u_1} A_{u_0}$ とおけば、

$A f_a = f_b$ である。

これを集めれば、

定理) Lie 環 $\mathfrak{L}$ の任意の2つの正則元をふくむ極大巾零部分環 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ があれば、$\mathfrak{h}' = A\mathfrak{h}$ なる $\mathfrak{L}$ の内部同型 A が存在する。

$\mathfrak{L}$ の2つの Cartan 分解があれば、一方より他方へは、$\mathfrak{L}$ の内部同型でうつり、根定の系 $\{\alpha, \beta, \cdots\cdots\}$ は1次型式とみて、如何なる Cartan 分解に於ても一致する。

註. 1) Gantmacher, Recueil Math., 47, 1939

(1947. 5. 6)