



Title	Lie環のCartan分解について
Author(s)	松島, 興三
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 120-123
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75184
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

49. Lie 環の Cartan 分解について

松 島 興 三 (名大)

Killing, Cartan 以来 Lie 環の研究に於て、正則元による Lie 環の固有空間への分解が重要な役割を演じてゐる。又複素数体上の Lie 環、 $\mathfrak{L}$ をその 1 つの正則元とする。[$\mathfrak{L}, \mathfrak{X}$] = $D_{\mathfrak{L}}\mathfrak{X}$ とおき、 $\mathfrak{X}$ を 1 次変換 $D_{\mathfrak{L}}$ の固有空間の直和に分解する。このとき $D_{\mathfrak{L}}$ の固有値 0 に対応する固有空間 $\mathfrak{L}_0$ は正則元をふくむ極大巾零部分環であり、0 以外の固有値に対応する固有空間 $\mathfrak{L}_\alpha$ 、もし必要であれば、更に分解し、結局次の様な $\mathfrak{L}$ の分解が得られる。

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{L}_\beta + \cdots$$

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] \subseteq \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}.$$

こゝに $\mathfrak{L}_0$ の任意の元 $\mathfrak{X}$ は $\mathfrak{L}_\alpha$ で 唯一つの固有値 $\alpha(\mathfrak{X})$ をもつ。 $\alpha, \beta, \cdots$ を根値とよぶ。 $\mathfrak{L}_0$ の次元を l とすれば $\alpha, \beta, \cdots$ は l 個の変数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ の 1 次型式と考へられる。

その他の正則元 $\mathfrak{L}'$ から出発すれば、 $\mathfrak{L}$ の別の分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'_0 + \mathfrak{L}'_\alpha + \mathfrak{L}'_\beta + \cdots$$

が得られる。

$\mathfrak{L}$ が半単純の場合、これら 2 つの分解に出てくる、正則元をふくむ極大巾零部分環（この場合は可換になるが）は $\mathfrak{L}$ の内部同型により互にうつること、すなはち、 $\mathfrak{L}'_0 = \sigma \mathfrak{L}_0$ なる内部同型 σ があることが Cartan により示された。又 Gantmacher は、この定理に Cartan のより もつとわかりやすい証明を与へてゐる。¹⁾ こゝでは上のことが $\mathfrak{L}$ が半単純でなくとも 一般の Lie 環で成立つことを証明したい。

$\mathfrak{O}_{\mathfrak{X}}$ を $\mathfrak{L}$ に対応する Lie 群とする。 $Q \in \mathfrak{L}$ とするとき、 Q を単位元に於ける切線 vector とする様な one parameter subgroup を $\exp tQ$ とかくことにしよう。

$\mathfrak{L}$ の 1 つの basis を $a_1, \cdots, a_r$ とし、 $a = t, a_1 + \cdots$

$+t_r a_r$ とし $(t_1, \dots, t_r)$ が $(0, \dots, 0)$ に十分近いとき,
 $\exp(a) = \exp(t_1 a_1 + \dots + t_r a_r) \in \mathcal{O}_f$ が定義される。
 $t_1, \dots, t_r$ は $\exp(a)$ の *Canonical parameter* である。
 $\mathcal{L}_g$ を $\mathcal{L}$ の部分環とすると $\mathcal{L}_g$ に対応する $\mathcal{O}_f$ の部分群を $\exp \mathcal{L}_g$
 とかくことにする。 $\exp(ta) \in \mathcal{O}_f$ の元 g で *transform*
 すれば、新しい *one parameter subgroup* $\exp(\mathcal{L}a')$ を
 得る。 $a \rightarrow a'$ は $\mathcal{L}$ の同型対応 A_g を与へる。これをこの内部同
 型とよぶ。

今、 $g = \exp a$ とすれば、 $A_g = \exp Da$ とかり、但し、
 $Da x = [a, x]$, $x \in \mathcal{L}$. $\mathcal{L} \in A_g$ で固有空間に分解する。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots$$

但し、 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$ は A_g の固有値 $1, f, \dots$ に対応する固有空
 間とする。そのとき A_g が同型対応であるから $\mathcal{L}_1$ は部分環をつくる

補題 u が $\mathcal{O}_f$ の単位元の近傍をうごくとき、

$$\{u^{-1}g \exp \mathcal{L}_1, u\} \text{ は } g \text{ のある近傍をふくむ}$$

(証)

$\mathcal{L}_1 = (a_1, \dots, a_s)$, $\mathcal{L}_2 + \dots = (a_{s+1}, \dots, a_r)$ とする。

$g^{-1} \exp(-(t_{s+1} a_{s+1} + \dots + t_r a_r)) g \exp(t_1 a_1 + \dots + t_s a_s) \cdot \exp(t_{s+1} a_{s+1} + \dots + t_r a_r) = \exp(p_1 a_1 + \dots + p_r a_r)$ とおくと、 $p_1, \dots, p_r$ は t_i の *analytic function* である。 $\exp(\sum p_i a_i)$ が、単位元の近傍をふくむことがよい。

それには、函数行列式 $\frac{\partial(p_1, \dots, p_r)}{\partial(t_1, \dots, t_r)}$ が $t_i = 0$ で 0 でないことがいへればよい。

$1 \leq j \leq s$ のとき $(\frac{\partial p_i}{\partial t_j})_{t=0}$ を考へよう。

$t_i = 0 (i \neq j)$ とおけば

$\exp(p_1 a_1 + \dots + p_r a_r) = \exp(t_i a_i)$ であるから、

$$p_i(0, \dots, t_j, \dots, 0) = \delta_{ij} t_j \quad 1 \leq j \leq s$$

$$\text{故に } \left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j} \right)_{t=0} = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq s$$

次に $s+1 \leq j \leq r$ の場合. $t_i = 0 \quad i \neq j$ とおけば

$$g^{-1} \exp(-t_j a_j) g \exp(t_j a_j) = \exp(-t_j A_g(a_j)) \exp(t_j a_j) \\ = \exp(p, a_1 + \cdots + t_r a_r)$$

であるから, $t_j = 0$ と微分することにより

$$(1 - A_g) a_j = \left(\frac{\partial P_t}{\partial t_j} \right)_{t=0} a_1 + \cdots + \left(\frac{\partial P_r}{\partial t_j} \right)_{t=0} a_r$$

しかるに $1 - A_g \quad \varepsilon_p + \varepsilon_r + \cdots = \{a_{s+1}, \cdots, a_r\}$ をそれぞれ自身にうつし, しかも, そこで, *non-singular* であるから,

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j} \right) = \cdots = \left(\frac{\partial P_s}{\partial t_j} \right) = 0 \quad s+1 \leq j \leq r$$

$$\det. \left(\left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j} \right)_{t=0} \right)_{s+1 \leq i, j \leq r} \neq 0$$

$$\text{故に } \frac{\partial (P_1, \cdots, P_r)}{\partial (t_1, \cdots, t_r)}_{t=0} \neq 0 \quad \text{である}$$

以上

$a_1, \cdots, a_r$ を $\mathfrak{g}$ の 1 つの *basis* とし, $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$,

$b = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_r a_r$ を 2 つの正則元, a, b を ふくむ極大

可零部分環を夫々 $\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b$ としやう。まづ, a, b の *parameter*

$(\lambda), (\mu)$ が十分近ければ, $A_\mu \mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_b$ なる内部同型 A_μ が存

在することとを証明しやう。十分小さい正数 ξ をえらんで, $D \mathfrak{g}_a,$

$D \mathfrak{g}_b$ が $2\pi\sqrt{-1}$ の 整数倍である様な固有値をもたない様に出来る。

ξ が小さければ, $\exp(\xi a), \exp(\xi b)$ が定義される。

$\exp(\xi a) = g, \exp(\xi b) = h$ とおかう。

A_g で $\mathfrak{g}$ を分解し, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_g + \mathfrak{p}$ とするとき,

$A_g = \exp D \mathfrak{g}_a$ で, $D \mathfrak{g}_a$ は $2\pi\sqrt{-1}$ の整数倍である様な固

有値をもたないから, $\mathfrak{h}_g = \mathfrak{g}_a$ である。

従つて, u が単位元の近傍をうごくとき, $\{u^{-1} g \exp \mathfrak{g}_a u\}$

は g の近傍をふくむ。しかるに $g \exp \mathfrak{g}_a \leq \exp \mathfrak{g}_a$ であり,

(μ) が (λ) に十分近ければ, h は g に十分近いのであるから,

$$h = \exp \xi b \in u^{-1} \exp \mathfrak{g}_a u = \exp A_\mu \mathfrak{g}_a$$

次に a, b を任意の正則元としやう。 $\mathfrak{g}$ の *Killing* の方程式を

$$|tE - (\xi_1 D_{a_1} + \cdots + \xi_r D_{a_r})| = t^r + \psi_1(\xi) t^{r-1} + \cdots + \psi_r(\xi) t^0$$

とすると、正則元は $\psi_{r-1}(\xi_1, \dots, \xi_r) \neq 0$ なる *parameter* の値に対応する元であり、又正則でない元は $\psi_{r-1}(\xi_1, \dots, \xi_r) = 0$ なる *parameter* に対応するから、正則でない元全体は次元が r より少くとも 1 つすくない *manifold* をつくる。従って正則元全体は連結閉集合である。故に任意の 2 つの正則元 a, b は正則元の中で、連続曲線でもすぶることが出来る。Curve 上の各点 C に、 $a \in \mathcal{U}_C \rightarrow \xi_a = A_C \xi_C$ となる様な近傍 $\mathcal{U}_C$ を対応させて Curve をおほふ。そのとき、Curve の *finite covering* $\mathcal{U}_{C_0}, \mathcal{U}_{C_1}, \dots, \mathcal{U}_{C_m}$ $C_0 = a, C_m = b$ をえらび、 $C_i \in \mathcal{U}_{C_{i-1}}$ なる様にとる。

そのとき、 $A_{C_0} \xi_{C_0} = \xi_{C_1}, A_{C_1} \xi_{C_1} = \xi_{C_2}, \dots, A_{C_{m-1}} \xi_{C_{m-1}} = \xi_{C_m}$ なる内部同型 $A_{C_0}, A_{C_1}, \dots, A_{C_{m-1}}$ が存在する。

$A = A_{C_{m-1}} A_{C_{m-2}} \cdots A_{C_1} A_{C_0}$ とおけば、

$$A \xi_a = \xi_b \quad \text{である。}$$

これをまとめれば、

定理) Lie 環 $\mathcal{L}$ の任意の 2 つの正則元を包む極大巾零部分環 $\mathfrak{h}_y, \mathfrak{h}_{y'}$ があれば、 $\mathfrak{h}_{y'} = A \mathfrak{h}_y$ なる $\mathcal{L}$ の内部同型 A が存在する。

$\mathcal{L}$ の 2 つの *Cartan* 分解があれば、一方より他方へは、 $\mathcal{L}$ の内部同型でうつり、根値の系 $\{\alpha, \beta, \dots\}$ は 1 次型式とみて、如何なる *Cartan* 分解に於ても一致する。

註. 1) Gantmacher, *Recueil Math.* 47, 1939

(1947. 5. 6)